**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 23 (1923)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** APPLICATION DES MÉTHODES DE H. GRASSMANN A LA GÉOMÉTRIE MÉTRIQUE DU PLAN

**Autor:** Delens, P.-C.

**Kapitel:** Chapitre IX. Les théorèmes de Laguerre et Humbert sur l'orientation; la représentation complexe des covariants des formes binaires.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-19731

## CHAPITRE IX

*Les théorèmes de Laguerre et Humbert sur l'orientation; la représentation complexe des covariants des formes binaires.*

Dans le chapitre VII, nous avons énoncé que l'orientante d'une forme segmentaire est celle de la forme vectorielle correspondante; c'est ce que Laguerre a exprimé en disant que l'orientation d'une courbe d'ordre $n$ était aussi celle du système de ses asymptotes.

Pour les formes du second ordre, nous avons déjà employé le fait que si deux formes cycliques $f \smile f'$ et $g \smile g'$ avaient une orientante nulle, les familles de coniques homofocales $ff' - \beta^2 j_1 j_2$ et $gg' - \mu^2 j_1 j_2$ avaient pour coniques harmoniques des cercles, dont les asymptotes déterminent des orientantes nulles.

Si nous écrivons maintenant le système des tangentes communes à deux coniques sous la forme:

$$(ff' - \beta^2 j_1 j_2)\cdot(gg' - \mu^2 j_1 j_2)\,)(\,(ff' - \beta^2 j_1 j_2\,)(\,x^2\cdot(gg' - \mu^2 j_1 j_2\,)(\,x^2 = 0$$

où $x$ est le point courant, ou encore:

$$\begin{vmatrix} (ff' - \beta^2 j_1 j_2 \overset{2}{)}()(\,x^2 & (gg' - \mu^2 j_1 j_2\,)(\,ff' - \beta^2 j_1 j_2\,)(\,x^2 \\ (ff' - \beta^2 j_1 j_2\,)(\,gg' - \mu^2 j_1 j_2\,)(\,x^2 & (gg' - \mu^2 j_1 j_2 \overset{2}{)}()(\,x^2 \end{vmatrix} = 0$$

quels que soient les paramètres $\beta$ et $\mu$, la forme orientante de cette forme du quatrième ordre sera:

$$(f\smile f')\overset{2}{|}\smile(g\smile g')\overset{2}{|} - (f\smile f' \mid g\smile g')^{\overset{2}{\smile}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\overline{ff'}^{\overset{2}{\smile}} \smile \overline{gg'}^{\overset{2}{\smile}} - (\overline{fg}\smile\overline{f'g} + \overline{fg'}\smile\overline{f'g})^{\overset{2}{\smile}}\right)$$

ou:

$$\overrightarrow{fg}\smile\overrightarrow{fg'}\smile\overrightarrow{f'g}\smile\overrightarrow{f'g'} \equiv \mathrm{T}_1\smile\mathrm{T}_2\smile\mathrm{T}_3\smile\mathrm{T}_4$$

$\mathrm{T}_1$, $\mathrm{T}_2$, $\mathrm{T}_3$, $\mathrm{T}_4$ étant les quatre tangentes communes à deux coniques quelconques prises dans les deux familles d'homofocales.

Laguerre a énoncé un théorème analogue pour l'orientation des tangentes communes à deux courbes quelconques, ou a deux de leurs homofocales, les systèmes de leurs foyers en particulier.

Sans entrer dans le détail de la formation symbolique des résultants, ce sera encore une conséquence du fait que dans le calcul de la forme orientante d'une forme donnée, toute différence entre les homofocales disparaît, les termes contenant $j_1 j_2$ en facteur s'annulant par la substitution du produit cyclique au produit algébrique.

Humbert s'est aussi attaché à la considération des divers groupes polaires cycliques d'un point par rapport à une courbe de classe quelconque, et aux lieux décrits par les points obtenus quand la courbe variait dans un faisceau tangentiel.

Or soit $f^{(n)}$ une courbe de classe $n$, $m$ un point du plan :

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} \mid m \smile x^{\underset{\smile}{n-1}} = 0$$

donne le groupe des $n-1$ points réels, communs aux deux faisceaux d'équations:

$$f^{(n)} \;)(\; mx^{n-1} \;)(\; j_1^n = 0$$

$$f^{(n)} \;)(\; mx^{n-1} \;)(\; j_2^n = 0$$

qui constituent les droites polaires de $m$ par rapport aux tangentes menées des points cycliques à la courbe $f^{(n)}$.

Le groupe polaire suivant sera le groupe polaire cyclique de $m$ par rapport au précédent, et ainsi de suite, jusqu'à:

$$f^{\underset{\smile}{(n)}} \mid m^{\underset{\smile}{n-1}} \smile x = 0$$

qui donne le point $m'$ commun aux droites:

$$f^{(n)} \;)(\; m^{n-1}x \;)(\; j_1^n = 0$$

$$f^{(n)} \;)(\; m^{n-1}x \;)(\; j_2^n = 0 \; .$$

Si on suppose maintenant que la courbe $f^{(n)}$ appartienne à un faisceau:

$$f^{(n)} = a^{(n)} + \theta\, b^{(n)}$$

le lieu du point $m'$, engendré par l'intersection de rayons homographiques issus des points cycliques $j_1$ et $j_2$, sera un cercle, d'équation:

$$\left(a^{\overset{(n)}{\smile}} \mid m^{\overset{n-1}{\smile}} \smile x\right) . \left(b^{\overset{(n)}{\smile}} \mid m^{\overset{n-1}{\smile}} \smile x\right) = 0 \ .$$

Dans les mêmes conditions, le groupe de points formant la $p^{\text{ième}}$ polaire cyclique de $m$ aurait décrit la courbe d'équation:

$$\left(a^{\overset{(n)}{\smile}} \mid m^{\overset{p}{\smile}} \smile x^{\overset{n-p}{\smile}}\right) . \left(b^{\overset{(n)}{\smile}} \mid m^{\overset{p}{\smile}} \smile x^{\overset{n-p}{\smile}}\right) = 0$$

ou:

$$\left(a^{(n)} \,)(\, m^p x^{n-p} \,)(\, j_1^n\right)\left(b^{(n)} \,)(\, m^p x^{n-p} \,)(\, j_2^n\right)$$
$$- \left(a^{(n)} \,)(\, m^p x^{n-p} \,)(\, j_2^n\right)\left(b^{(n)} \,)(\, m^p x^{n-p} \,)(\, j_1^n\right) = 0$$

et les points cycliques étant points multiples d'ordre $2(n\text{-}p)$, cette courbe est $(n\text{-}p)$-circulaire.

En particulier, les foyers d'une courbe de classe $n$ constituent le groupe polaire d'une courbe de classe $n + 1$ par rapport à un vecteur *quelconque* $u$ de la droite de l'infini.

La représentation complexe des covariants des formes binaires repose sur le principe de transfert déjà exposé entre les relations sur la droite et les relations cycliques du plan. Mais précédemment son exposition nécessitait l'emploi des coordonnées symétriques relatives à des axes déterminés, alors qu'elle peut maintenant se faire de façon absolue. Nous nous bornerons ici à l'étude partielle d'une forme cubique:

$$f^{\overset{(3)}{\smile}} = a \smile b \smile c \ .$$

Les formes covariantes sont l'évectant cubique:

$$g^{\overset{(3)}{\smile}} = a' \smile b' \smile c'$$

et la hessienne:

$$h^{\overset{(2)}{\smile}} = h_1 \smile h_2$$

dont le discriminant fournit l'invariant de la forme cubique, que nous supposerons différent de zéro.

La hessienne peut être définie par:

$$\left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \mid x\right) \Big|^{2} = 0$$

ou:

$$\left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \smile x\right) \overset{2}{|} = (a \smile b \smile c \smile x) \overset{2}{|} = 0$$

qui sous l'une ou l'autre forme exprime que $h_1$ et $h_2$ sont les deux points $x$ pour lesquels le rapport anharmonique complexe $(abcx)$ est équi-anharmonique.

L'évectant cubique est le lieu des points $x$ pour lesquels:

$$\left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \mid x^{\overset{2}{\smile}}\right) . \left(h^{\overset{(2)}{\smile}} \mid x\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \smile x\right) \overset{2}{.} \left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \smile x\right) \overset{2}{.} \left(f^{\overset{(3)}{\smile}} \smile x\right) = 0$$

ou qui sont tels qu'un des rapports $(abcx)$ est harmonique.

Donc, sur le cercle circonscrit à $abc$, $a'$, $b'$, $c'$ sont les conjugués cycliques de $a$, $b$, $c$ respectivement par rapport à $b \smile c$, $c \smile a$, $a \smile b$, tandis que la hessienne est représentée par les anti-points de $h_1$ et $h_2$, conjugués au cercle précédent.

On sait que, quel que soit le point $x$, on a:

$$f^{\overset{(3)}{\smile}} \mid h^{\overset{(2)}{\smile}} \smile x = 0$$

et aussi que $g^{\overset{(3)}{\smile}}$ a même hessienne que $f^{\overset{(3)}{\smile}}$.

Nous voulons montrer la construction des polaires d'un point $p$ par rapport à $f^{(3)}$; soient $q_1$ et $q_2$ constituant le premier groupe polaire:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ap} \smile b \smile c + \overrightarrow{bp} \smile c \smile a + \overrightarrow{cp} \smile a \smile b &= \left(\overrightarrow{ap} + \overrightarrow{bp} + \overrightarrow{cp}\right) \smile q_1 \smile q_2 \\ &= 3\,\overrightarrow{gp} \smile q_1 \smile q_2\end{aligned}$$

d'où:

$$-\,)\frac{\overrightarrow{ab} \smile \overrightarrow{bc} \smile \overrightarrow{ca}}{3\,\overrightarrow{gp}} = )\frac{\overrightarrow{aq_1} \smile \overrightarrow{aq_2} \smile \overrightarrow{bc}}{\overrightarrow{ap}} = )\frac{\overrightarrow{bq_1} \smile \overrightarrow{bq_2} \smile \overrightarrow{ca}}{\overrightarrow{bp}} = )\frac{\overrightarrow{cq_1} \smile \overrightarrow{cq_2} \smile \overrightarrow{ab}}{\overrightarrow{cp}}$$

Supposons d'abord $p$ sur le cercle des points $a$, $b$, $c$.:

$$)\frac{\overrightarrow{ap}}{\overrightarrow{bp}} = \lambda\, )\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}}$$

$\lambda$ étant un nombre réel; le second et le troisième rapport donnent:

$$\overrightarrow{aq_1} \smile \overrightarrow{aq_2} + \lambda \left( )\frac{\overrightarrow{ac}}{\overrightarrow{bc}} \right)^{(2} \overrightarrow{bq_1} \smile \overrightarrow{bq_2} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{bc}^{\overset{2}{\smile}} \smile a^{\overset{2}{\smile}} + \lambda\, \overrightarrow{ac}^{\overset{2}{\smile}} \smile b^{\overset{2}{\smile}}\right) \Big| \, q_1 \smile q_2 = 0$$

de forme :

$$e_1 \smile e_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0\ .$$

Or on sait en outre que :

$$h_1 \smile h_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0$$

d'où la construction de $q_1 \smile q_2$, couple conjugué à deux couples déterminés.

A remarquer que:

$$)\frac{\overrightarrow{bc}^{\smile 2}}{\overrightarrow{ac}^{\smile 2}} = -\lambda)\frac{\overrightarrow{be_1}^{\smile 2}}{\overrightarrow{ce_1}^{\smile 2}} = -\lambda)\frac{\overrightarrow{be_2}^{\smile 2}}{\overrightarrow{ce_2}^{\smile 2}}$$

permet de construire les points $e_1$ et $e_2$, et que cette construction sera la même, comme aussi celle des points $q_1$ et $q_2$, quand à un point $p$ sur le cercle on aura substitué un point hors du cercle, $\lambda$ étant alors remplacé par un opérateur complexe (similitude).

On construira ensuite la seconde polaire $r$ par:

$$q_1 \smile q_2 \mid r \smile p = 0$$

sans aucune difficulté.

Pour construire $q_1$ et $q_2$, on pouvait aussi employer:

$$)\frac{\overrightarrow{ap}}{\overrightarrow{aq}} + )\frac{\overrightarrow{bp}}{\overrightarrow{bq}} + )\frac{\overrightarrow{cp}}{\overrightarrow{cq}} = 0$$

en mettant $q$ à la place d'un des points $q_1$ ou $q_2$.

En employant:

$$\overrightarrow{ap} = \overrightarrow{aq} + \overrightarrow{qp}\ , \quad \text{etc.,}$$

on aura:

$$)\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qa}} + )\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qb}} + )\frac{\overrightarrow{qp}}{\overrightarrow{qc}} = 3\ .$$

De même la construction de $r$ mènera à:

$$)\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pa}} + )\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pb}} + )\frac{\overrightarrow{pr}}{\overrightarrow{pc}} = 3\ .$$

En employant les opérateurs conjugués, on peut écrire:

$$\frac{\overrightarrow{pa''}}{\overrightarrow{pr''}} + \frac{\overrightarrow{pb''}}{\overrightarrow{pr''}} + \frac{\overrightarrow{pc''}}{\overrightarrow{pr''}} = 3$$

$a''$, $b''$, $c''$, $r''$ étant les points inverses de $a$, $b$, $c$, $r$ par rapport à $p$ avec la puissance un, ou:

$$\overrightarrow{pa''} + \overrightarrow{pb''} + \overrightarrow{pc''} = 3\overrightarrow{pr''}$$

ce qui donne $r''$, d'où $r$. C'est en somme ainsi que procède Laguerre, mais nous voulons insister sur le fait qu'il ne convient pas de représenter par $\frac{1}{\overrightarrow{pa}}$ ou $\frac{1}{\overrightarrow{pa}}$ le vecteur $\overrightarrow{pa''}$, parce que le produit cyclique par un vecteur quelconque donnerait des résultats tout à fait différents pour les deux expressions.

Si on a commencé par la construction de $r$, celle de $q_1$ et $q_2$ résulte de:

$$r \smile p \mid q_1 \smile q_2 = 0$$

avec:

$$h_1 \smile h_2 \mid q_1 \smile q_2 = 0\ .$$

Nous n'avons pas abordé, dans cette étude, le calcul différentiel; pour en donner un exemple, considérons la transformation conforme:

$$y = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\overset{2}{\smile}{c}}{x}\right)$$

$x$, $y$, $c$ étant des vecteurs:

$$x = \overrightarrow{op} \qquad c = \overrightarrow{of} \qquad y = \overrightarrow{om}\ .$$

Dans ces conditions, si $p$ décrit un cercle de centre $o$, $m$ décrit une ellipse de foyers $f$ et $f' = 2o - f$; si $p$ décrit une droite passant par $o$, $m$ décrit une hyperbole homofocale aux ellipses précédentes, et ayant pour asymptotes la droite lieu de $p$ et sa symétrique par rapport à $\overline{of}$.

Un déplacement quelconque de $p$ entraîne un déplacement correspondant de $m$ et :

$$2dy = dx - \frac{c^2\,dx}{x^2} = \frac{dx}{x}\left(x - \frac{c^2}{x}\right)$$

$$dy = \frac{dx}{x}(x - y)$$

ce qui donne la similitude instantanée :

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{y}{x}$$

Si $p$ décrit un cercle de centre $o$ :

$$\frac{dx}{x} = \lambda \mathfrak{I} = \frac{dy}{x - y}$$

donc le déplacement du point $m$ est perpendiculaire à :

$$x - y = \overrightarrow{mp}$$

Si au contraire $p$ décrit une droite passant par $o$, le déplacement de $m$ est suivant $mp$. On retrouve là les propriétés caractéristiques de la normale à l'ellipse et de la tangente à l'hyperbole homofocale.

Nous espérons, par les brèves indications précédentes, et l'esquisse tracée dans cet article des efforts qu'on peut faire pour adapter l'algèbre géométrique à la traduction claire des propriétés des figures, avoir intéressé quelques lecteurs et leur avoir donné, avec le goût de poursuivre de semblables essais, la conviction que nous avons empruntée à Leibnitz, Grassmann et tant d'autres: qu'il sera un jour possible de répéter, par des combinaisons de symboles, les configurations géométriques, mécaniques, physiques, dont nous aurons pénétré les lois. Que cette conviction nous excuse des maladresses et longueurs encore présentes dans cet exposé !