

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 23 (1923)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES INVARIANTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE  
**Autor:** Peyovitch, Tadia  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19737>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

SUR  
LES INVARIANTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE  
DU PREMIER ORDRE

PAR

M. Tadia PEYOVITCH (Belgrade).

---

1. — Il peut arriver qu'une équation différentielle d'une certaine forme conserve la même forme pour des changements de fonction et de variable contenant des fonctions indéterminées. Il est alors de la plus grande importance de former les fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements, c'est-à-dire *les invariants de l'équation*. La théorie des invariants des équations différentielles linéaires est étudiée par Laguerre<sup>1</sup>, Brioschi<sup>2</sup> et Halphen<sup>3</sup>. MM. Roger Liouville<sup>4</sup> et Appell<sup>5</sup> ont étudiés à différents points de vues les invariants de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = e_0 + 3e_1y + 3e_2y^2 + e_3y^3 .$$

Nous nous proposons, dans le présent travail, l'étude des invariants de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2y^2 + 2a_1y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 , \quad (1)$$

qui conserve la même forme, comme nous avons vu dans notre thèse de doctorat<sup>6</sup>, quand on choisit une nouvelle fonction  $\eta$

---

<sup>1</sup> *Comptes rendus*; t. LXXXVIII, pp. 116 et 224.

<sup>2</sup> *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105.

<sup>3</sup> *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*; t. XXVIII, n° 1.

<sup>4</sup> *Comptes rendus*; 6 septembre 1886; 12 septembre 1887.

<sup>5</sup> *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 361, 1889.

<sup>6</sup> Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation différentielle importante. (*Glas Srpske Kraljevske Akademije*; t. CIX. 1923, en serbe).

et une nouvelle variable indépendante  $\xi$  liées à  $y$  et  $x$  par les relations

$$y = u_{(x)} \eta, \quad \frac{d\xi}{dx} = v_{(x)};$$

les coefficients  $a_0, a_1, a_2$ , étant des fonctions de la variable indépendante  $x$ . Quelques-uns des résultats contenus dans ce mémoire se trouvent indiqués dans notre thèse; mais dans ce travail nous voulons approfondir la *théorie des invariants de l'équation (1)*.

Pour les invariants absolus, invariants relatifs et semi-invariants nous avons adopté les définitions de Halphen (loc. cit.).

2. — Posons, dans l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 \quad (1)$$

$$y = \lambda \eta, \quad x = \lambda \xi,$$

où  $\lambda$  est une constante; l'équation (1) deviendra

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \alpha_2 \eta^2 + 2\alpha_1 \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \alpha_0 = 0,$$

où

$$\alpha_0 = a_0, \quad \alpha_1 = \lambda a_1, \quad \alpha_2 = \lambda^2 a_2;$$

c'est ce qui nous conduit à attribuer au coefficient  $a_i$  le poids  $i$ . On a de plus

$$\frac{d\alpha_i}{d\xi} = \lambda^{i+1} \frac{da_i}{dx}, \quad \frac{d^2\alpha_i}{d\xi^2} = \lambda^{i+2} \frac{d^2a_i}{dx^2},$$

ce qui conduit à attribuer à la dérivée  $\frac{d^k a_i}{dx^k}$  le poids  $(i + k)$ .

Il est possible, par des quadratures, de ramener l'équation (1) à une forme canonique ne contenant plus qu'un *invariant absolu*. Pour opérer cette réduction, faisons le changement de fonction

$$y = U_{(x)} Y,$$

et déterminons la fonction  $U_{(x)}$  de façon que la nouvelle équation différentielle ne contienne pas le terme en  $Y \frac{dY}{dx}$ .

Nous aurons

$$U_{(x)} = e^{\int a_1 dx},$$

et l'équation prendra la forme

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (a_2 - a_1^2)Y^2 = -\frac{a_0}{U^2}.$$

Enfin, faisons un changement de variable indépendante

$$\frac{dX}{dx} = M(x)$$

et déterminons  $M_{(x)}$  de façon que le coefficient de  $Y^2$  devienne l'unité, on aura

$$M(x) = \sqrt{a_2 - a_1^2},$$

et l'équation prendra la forme canonique

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X), \quad (\alpha)$$

où

$$H = -\frac{a_0}{M^2 U^2}.$$

Les fonctions  $U$  et  $M$  sont des *invariants relatifs*,  $H$  et  $X$  des *invariants absolus* pour toutes les transformations de la forme

$$y = u_{(x)} \eta, \quad \frac{d\xi}{dx} = v_{(x)}. \quad (2)$$

Pour le vérifier, nous faisons dans l'équation (1) le changement (2) de fonction et de variable; l'équation prendra la forme

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \alpha_2 \eta^2 + 2\alpha_1 \eta \frac{d\eta}{d\xi} + \alpha_0 = 0,$$

où

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{u^2 v^2}, \quad \alpha_1 = \frac{u' + a_1 u}{uv}, \quad \alpha_2 = \frac{u'^2 + 2a_1 u u' + a_2 u^2}{u^2 v^2}, \quad (3)$$

$u'$  désigne la dérivée  $\frac{du}{dx}$ .

Si nous appelons  $U_0, M_0, H_0, X_0$  les fonctions composées avec les coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  et la variable  $\xi$ , comme  $U, M, H, X$  le sont avec  $a_0, a_1, a_2$  et la variable  $x$ , nous aurons

$$U_0 = e^{-\int \alpha_1 d\xi}, \quad M_0 = \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}.$$



En remplaçant  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  par les valeurs (3) et  $d\xi$  par  $\nu dx$ , on vérifie que l'on a

$$U_0 = \frac{1}{\nu} U, \quad M_0 = \frac{1}{\nu} M; \quad (4)$$

d'où

$$\left. \begin{aligned} H_0 &= -\frac{\alpha_0}{M_0^2 U_0^2} = -\frac{a_0}{M^2 U^2} = H, \\ X_0 &= \int M_0 d\xi = \int M dx = X. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Les équations (4) et (5) montrent que  $U$  et  $M$  sont des *invariants relatifs*,  $H$  et  $X$  des *invariants absolus*.

*Remarque.* L'introduction du facteur constant  $k^2$  dans  $H$  donne, d'ailleurs, des équations canoniques qui se déduisent les unes des autres. Posons

$$H_1 = k^2 H,$$

on aura

$$dX_1 = dX. \quad \text{d'où} \quad X_1 = X + h,$$

$h$  désignant une nouvelle constante. L'équation canonique correspondante

$$\left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)^2 + Y_1^2 = H_1$$

se ramène à la forme

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H$$

par la substitution

$$Y_1 = kY, \quad X_1 = X + h.$$

3. — Les dérivées  $\frac{dH}{dY}, \frac{d^2H}{dX^2}, \dots$  sont des *invariants absolus* qui se calculent facilement, par voie récurrente, en fonctions des coefficients  $a_0, a_1, a_2$ . En effet, partons des formules

$$H = -\frac{a_0}{M^2 U^2}, \quad \frac{dX}{dx} = M_{(x)}, \quad U_{(x)} = e^{-\int a_1 dx}, \quad M_{(x)} = \sqrt{a_2 - a_1^2},$$

nous trouverons

$$\frac{dH}{dX} = \frac{\frac{dH}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = -\frac{p_4}{M^4 U^2}, \quad \frac{d^2H}{dX^2} = -\frac{p_6}{M^6 U^2},$$

en général

$$\frac{d^n H}{dX^n} = - \frac{p_{2n+2}}{M^{2n+2} U^2}, \quad (6)$$

où  $p_4, p_6, \dots, p_{2n+2}$  sont des *invariants relatifs* donnés par la formule récurrente

$$p_{2n+2} = M \frac{dp_{2n}}{dx} - 2p_{2n} \left( n \frac{dM}{dx} - a_1 M \right);$$

par exemple,  $p_4$  a la valeur (pour  $n = 1$ )

$$p_4 = M \frac{da_0}{dx} - 2a_0 \left( \frac{dM}{dx} - a_1 M \right); \quad (p_2 = a_0).$$

Les indices 4, 6, ...,  $2n + 2$  désignent les *poids* des invariants.

Les invariants absolus  $H, H' = \frac{dH}{dx}$  et  $X$  sont des fonctions de  $x$  que nous avons calculées; l'élimination de  $x$  fournira entre  $H$  et  $X$  ou entre  $H$  et  $H'$  une relation caractéristique de l'équation différentielle considérée. Inversement, étant donnée une relation entre  $H$  et  $X$ , ou mieux une relation entre  $H$  et  $H'$ , que l'on peut toujours déduire par différentiation d'une relation entre  $H$  et  $X$ , on aura, comme il suit, la relation correspondante entre les coefficients  $a_0, a_1, a_2$  et leurs dérivées par rapport à  $x$ .

Soit

$$f(H, H') = 0 \quad (7)$$

l'équation donnée, on aura, après différentiation,

$$\frac{\partial f}{\partial H} H' + \frac{\partial f}{\partial H'} H'' = 0. \quad (8)$$

D'autre part, les expressions (6) pour  $H, H', H''$  donnent

$$\frac{H'}{H} = \frac{p_4}{a_0 M^2}, \quad \frac{H''}{H'} = \frac{p_6}{p_4 M^2}. \quad (9)$$

L'élimination de  $H, H', H''$  entre ces quatre équations (7), (8), (9) fournira la *condition cherchée* sous forme d'une relation

entre les deux *invariants absolus*  $\frac{p_4}{a_0 M^2}$  et  $\frac{p_6}{p_4 M^2}$

$$\Psi \left( \frac{p_4}{a_0 M^2}, \frac{p_6}{p_4 M^2} \right) = 0. \quad (10)$$

Cette condition (10) est donc *nécessaire* pour que H et H' soient liés par la relation (7); elle est *suffisante*. Pour le démontrer nous pouvons toujours supposer la relation (7) entre H et H' mise sous la forme

$$H = \varphi\left(\frac{H'}{H}\right), \quad (7')$$

d'où, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à X

$$\frac{H'}{H} = \frac{\varphi'\left(\frac{H'}{H}\right)}{\varphi\left(\frac{H'}{H}\right)} \left[ \frac{H''}{H} - \frac{H'^2}{H^2} \right];$$

en divisant par  $\frac{H'}{H}$ , nous aurons la *relation cherchée* entre les invariants  $\frac{H'}{H}$ ,  $\frac{H''}{H'}$  sous la forme

$$1 = \frac{\varphi'\left(\frac{p_4}{a_0 M^2}\right)}{\varphi\left(\frac{p_4}{a_0 M^2}\right)} \left[ \frac{p_6}{p_4 M^2} - \frac{p_4}{a_0 M^2} \right], \quad (10')$$

après la substitution  $\frac{H'}{H}$ ,  $\frac{H''}{H'}$  par leurs valeurs de (6); cette relation (10') remplace la condition (10).

Supposons maintenant que, pour l'équation différentielle (1), les coefficients  $a_0, a_1, a_2$  vérifient cette condition (10'); appelons  $H_1$  l'invariant absolu de cette équation,  $X_1$  la variable canonique et  $H'_1, H''_1$  les dérivées de  $H_1$  par rapport à  $X_1$ . On aura

$$\frac{p_4}{a_0 M^2} = \frac{H'_1}{H_1}; \quad \frac{p_6}{p_4 M^2} = \frac{H''_1}{H'_1},$$

et la condition (10') pourra s'écrire, après qu'on aura multiplié les deux membres par  $\frac{H'_1}{H_1}$ ,

$$\frac{H'_1}{H_1} = \frac{\varphi'\left(\frac{H'_1}{H_1}\right)}{\varphi\left(\frac{H'_1}{H_1}\right)} \left[ \frac{H''_1}{H_1} - \frac{H'^2_1}{H_1^2} \right];$$

d'où, en intégrant et désignant par  $k^2$  une constante arbitraire,

$$H_1 = k^2 \varphi \left( \frac{H'_1}{\bar{H}_1} \right).$$

On pourra toujours amener cette constante  $k$  à être l'unité, de façon à amener cette dernière relation à prendre la forme (7'). En effet, en faisant dans la dernière relation

$$H_1 = k^2 H, \quad X_1 = X + h,$$

cette relation se réduira à la relation (7').

*La condition (10) ou (10') est donc nécessaire et suffisante pour que H et H' soient liés par relation (7) ou (7').*

Remarquons que, si l'on voulait trouver la forme canonique correspondant à une relation donnée

$$\Psi \left( \frac{p_4}{a_0 M^2}, \frac{p_6}{p_4 M^2} \right) = 0$$

entre les deux invariants absolus  $\frac{p_4}{a_0 M^2}$ ,  $\frac{p_6}{p_4 M^2}$ , on aurait à intégrer l'équation

$$\Psi \left( \frac{H'}{H}, \frac{H''}{H'} \right) = 0.$$

Si, dans cette équation, on remplace  $H''$  par sa valeur

$$H'' = \frac{dH'}{dX} = H' \frac{dH'}{dH},$$

elle se transforme en une équation homogène en  $H'$  et  $H$

$$\Psi \left( \frac{H'}{H}, \frac{dH'}{dH} \right) = 0$$

*intégrable* par les méthodes élémentaires.

*Exemples.* 1° Cherchons la relation nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0$$

puisse être ramenée à la forme canonique

$$\left( \frac{dY}{dX} \right)^2 + Y^2 = X^2.$$

On devra avoir

$$H = X^2 ,$$

d'où

$$H' = 2X , \quad H'' = 2$$

et

$$H'^2 = 4H .$$

Alors les équations

$$\frac{p_4}{a_0 M^2} = \frac{H'}{H} , \quad \frac{p_6}{p_4 M^2} = \frac{H''}{H'}$$

donnent, en remplaçant  $H$  et  $H''$  par leurs valeurs  $\frac{H'^2}{4}$  et  $2$  et en éliminant  $H'$ , la condition cherchée

$$p_4^2 - 2a_0 p_6 = 0$$

*nécessaire et suffisante.*

Comme on a

$$\frac{d^3 H}{dX^3} = - \frac{p_8}{M^8 U^2} ,$$

la condition  $p_8 = 0$  avec  $p_6 \geq 0$  est aussi une condition nécessaire pour que l'équation (1) puisse être réduite à la forme considérée. Mais cette condition n'est pas suffisante; car, si elle est remplie, l'équation (1) pourra se ramener à l'équation

$$(\alpha) \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 + Y^2 = H(X) ,$$

où  $H(x)$  est un polynôme du second degré en  $X$ .

En général, la condition pour que  $H$  soit de la forme  $kX^n$  ( $k = \text{const}$ ) est

$$(n - 1)p_4^2 - na_0 p_6 = 0 ,$$

c'est un *invariant relatif du poids 8*.

On conclut de (6) que la condition  $p_{2n+2} = 0$  exprime que, dans la forme canonique  $(\alpha)$ ,  $H$  est un polynôme de degré  $(n - 1)$  en  $X$ ; si l'on a  $p_4 = 0$   $H$  est une constante.

2° Cherchons la relation nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) puisse être ramenée à la forme canonique

$$\left( \frac{dY}{dX} \right)^2 + Y^2 = e^X .$$

En opérant comme dans l'exemple précédent, on obtient la condition cherchée

$$p_4^2 - a_0 p_6 = 0 ,$$

l'invariant relatif du poids 8. Mais cette condition, dans ce cas, on peut simplifier en posant

$$H = e^x , \quad \text{d'où} \quad H' = e^x .$$

Les équations

$$H = -\frac{a_0}{M^2 U^2} , \quad H' = -\frac{p_4}{M^4 U^2}$$

après la substitution  $H$  et  $H'$  par leurs valeurs  $e^x$ , et après l'élimination de  $e^x$ , donnent la condition cherchée

$$p_4 - a_0 M^2 = 0$$

*nécessaire et suffisante*; c'est un *invariant relatif du poids 4*.

4. — Dans notre thèse (*loc. cit.*) nous avons donné les cas d'intégrabilité de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 ; \quad (1)$$

mais nous les répéterons ici pour compléter ce travail.

1° Le cas le plus simple est celui où les coefficients  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  sont constants ou peuvent être rendus constants par un changement convenable de fonction et de variable indépendante.

2° Un autre *cas* d'intégrabilité s'obtient à l'aide de la transformation suivante. Si l'on pose dans l'équation (1)  $a_0 = a_2$  et en la divisant par  $a_0$ , elle devient, après différentiation,

$$\mathcal{A}_2 y'^2 + 2\mathcal{B}_1 y'' y' + 2\mathcal{B}_2 y'' y + 2\mathcal{B}_3 y' y = 0 ;$$

en y posant

$$y = e^{\int \frac{dx}{u}} ,$$

on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{pu^2 + Qu + R}{Su + T} .$$

Cette équation est étudiée par M. ELLIOT<sup>1</sup>; il a transformé cette équation, en posant

$$u = aZ + b$$

<sup>1</sup> *Annales de l'Ecole Norm. Sup.*, 1890, p. 101.

où

$$a = e^{\int \frac{p}{S} dx}, \quad b = -\frac{T}{S},$$

à la forme canonique

$$\frac{dZ}{dx} + f(x) = \frac{\varphi(x)}{Z}; \quad (11)$$

les coefficients  $f(x)$  et  $\varphi(x)$  étant des fonctions de  $a_0$  et  $a_1$ , c'est-à-dire de  $x$ , faciles à calculer (thèse: p. 11).

Dans l'équation (11) on peut séparer des variables si l'on a:

- a)  $f(x) = 0$ ,
  - b)  $\varphi(x) = 0$ ,
  - c)  $f(x) = \text{const.}, \varphi(x) = \text{const.} (\varphi(x) = kf(x))$
  - d)  $f(x) = \text{const.}, \varphi(x) = kx (\varphi(x) = kxf(x))$
- }  $k = \text{const.}$

A chaque cas d'intégrabilité de l'équation (11) correspond un cas d'intégrabilité de l'équation (1) (thèse).

3° Si l'on pose dans l'équation (1)

$$a_0 = ax + b, \quad a_1 = c, \quad a_2 = 0,$$

où  $a, b, c$  sont constants, elle devient, après différentiation,

$$2y'y'' + 2cy'^2 + 2cyy'' + a = 0.$$

En y posant

$$y' = p, \quad y'' = p \frac{dp}{dy}$$

et considérant  $y$  comme fonction inconnue et  $p$  comme variable indépendante, elle devient une équation linéaire en  $y$

$$\frac{dy}{dp} + \frac{2cp}{a + 2p^2}y + \frac{2p^2}{a + 2p^2} = 0.$$

4° Si, dans l'équation (1), on fait  $a_2 = a_1^2$ , elle se ramène à l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx} + a_1y + \sqrt{-a_0}\right)\left(\frac{dy}{dx} + a_1y - \sqrt{-a_0}\right) = 0.$$

5.— L'équation canonique

$$(\alpha) \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X)$$

est *intégrable*, comme nous l'avons montré (thèse), si  $H(X)$  a l'une des formes

$$H(X) = \mathcal{A} , \quad H(X) = \mathcal{A} e^{\mathcal{B}X} ,$$

$$H(X) = \mathcal{A} \cos \frac{2}{3}X + \mathcal{B} \sin \frac{2}{3}X ,$$

$$H(X) = (\mathcal{A}X + \mathcal{B}) e^{2Xi} ,$$

où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont constantes arbitraires et  $i = \sqrt{-1}$  (l'unité imaginaire).

*En utilisant la théorie des invariants, on peut ramener l'équation (1) à la forme canonique ( $\alpha$ ) intégrable.*

L'équation ( $\alpha$ ), dont la forme plus générale est (1), se présente dans plusieurs problèmes d'analyse mathématique, de Géométrie supérieure et de Mécanique rationnelle.

Par exemple, dans la Géométrie supérieure, le problème de déterminer la ligne courbe dans le plan, dont l'arc est la fonction donnée de l'angle polaire; la recherche des géodésiques des surfaces spirales, et le problème d'applicabilité de ses surfaces, l'une sur l'autre, se ramènent à l'intégration de l'équation ( $\alpha$ ).

Dans la Mécanique, le problème du mouvement d'un point matériel dans un plan, sollicité par la force, laquelle n'est qu'une fonction de l'angle polaire, et, en outre, soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, se ramène à l'équation différentielle ( $\alpha$ )<sup>1</sup>. En général, la solution de tout problème de Mécanique dans le plan, pour lequel il existe une fonction des forces, les lignes équipotentiels étant des droites d'ailleurs quelconques, se ramène, par la méthode de Jacobi, à l'intégration de l'équation différentielle ( $\alpha$ )<sup>2</sup>.

MM. Mich. Petrovitch<sup>3</sup> et Heymann<sup>4</sup> ont étudié les transformations de l'équation (1).

Belgrade, Septembre 1923.

<sup>1</sup> ELLIOT, *Annales de l'Ecole Norm. Sup.*; 1893; p. 251.

<sup>2</sup> DARBOUX, *Leçons sur la Théorie des Surfaces*; t. III, p. 85.

<sup>3</sup> *Comptes rendus*; t. CXXII, n° 22; 1896.

<sup>4</sup> *Journal für reine und angewandte Mathematik*; t. 119; 1898; p. 253.