Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE
Autor: Streit, Dr Phil. A.
Kapitel: 3. — Carré construit sur un côté d'un triangle
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

Nous pouvons donc envisager la relation $h'^2 = a'a'' \pm bb''$ relative à un triangle *acutangle* ou *obtusangle* en A, c'est-à-dire le théorème II′, comme étant la *généralisation* du théorème énoncé ci-dessus et relatif à un triangle *rectangle.*

Si l'on tient compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* — c'est-à-dire le théorème II′ — peut s'énoncer comme suit:

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur chaque hauteur est équivalent à la somme algébrique du rectangle construit sur les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant et du rectangle construit sur l'un des deux autres côtés et la projection du second sur lui, la surface d'un des rectangles devant être prise négativement si l'un des segments qui deviennent ses dimensions est négatif.*

3. — Carré construit sur un côté d'un triangle.

Premier cas. — Triangle *acutangle* (fig. 4).

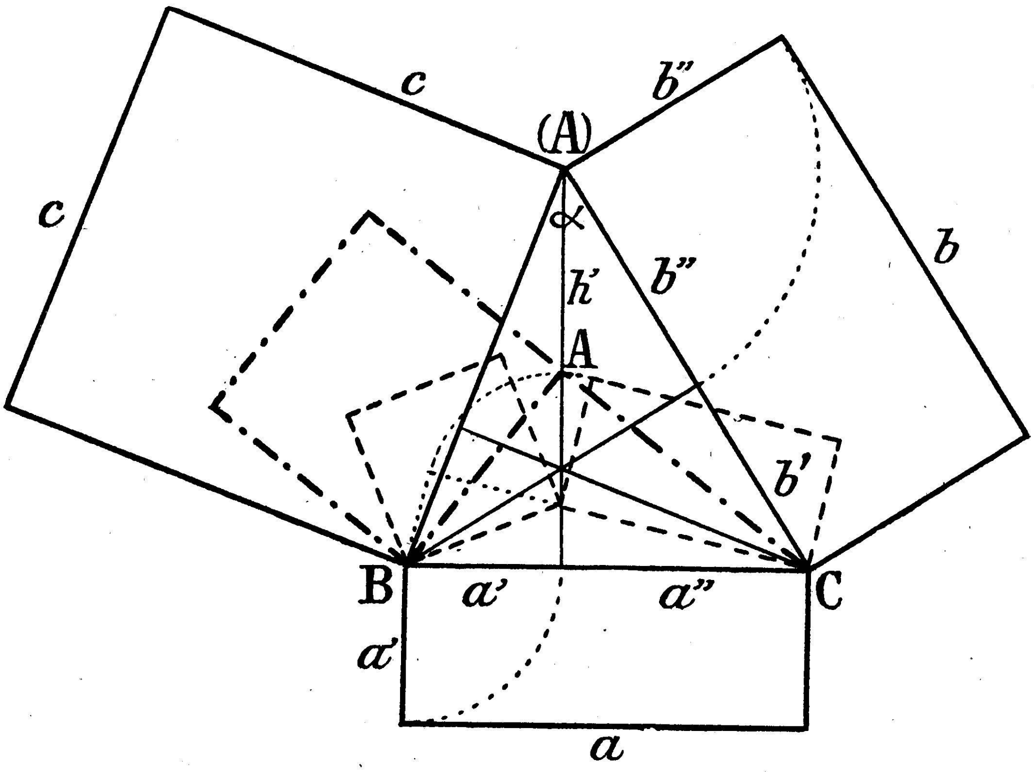

Fig. 4.

Le théorème II donne

$$h'^2 = a'a'' + bb''.$$

Mais

$$h'^2 = c^2 - a'^2 .$$

Par suite

$$c^2 - a'^2 = a'a'' + bb'' ,$$

d'où

$$c^2 = a'^2 + a'a'' + bb'' =$$
$$= a'(a' + a'') + bb'' .$$
$$c^2 = aa' + bb'' .$$

Par permutation circulaire on a

$$\begin{cases} a^2 = bb' + cc'' , \\ b^2 = cc' + aa'' , \\ c^2 = aa' + bb'' , \end{cases} \tag{3}$$

c'est-à-dire

Théorème III. — *Dans tout triangle* ACUTANGLE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est égal à la somme des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

Second cas. — Triangle *obtusangle* ($\alpha > 90°$) (fig. 4).

En effectuant sur les formules (2′) les mêmes transformations que, dans le premier cas, sur les formules (2) et en observant que $a = a' + a''$, $b = b' - b''$, $c = c'' - c'$, on est conduit au résultat suivant

$$\alpha > 90° ,$$

$$\begin{cases} a^2 = bb' + cc'' , \\ b^2 = -cc' + aa'' , \\ c^2 = aa' - bb'' . \end{cases} \tag{3'}$$

Le carré du côté *opposé* à l'angle obtus est donc égal à la *somme* des rectangles, tandis que le carré d'un côté *adjacent* est égal à la *différence* des deux rectangles dont le plus grand correspond au côté opposé à l'angle obtus:

Théorème III′. — *Dans un triangle* OBTUSANGLE, *le carré construit sur un côté est égal à la somme ou à la différence des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui, suivant que ce premier côté est opposé ou adjacent à l'angle obtus.*

Remarque 1. — Si l'on observe la règle des signes des segments (voir 2, remarque 1), c'est-à-dire si l'on considère comme *négatif* un segment situé en entier sur le prolongement du côté, les formules (3) sont alors valables pour un triangle obtusangle comme pour un triangle acutangle, c'est-à-dire pour un triangle *quelconque*.

Remarque 2. — Soit ABC un triangle *rectangle* en A (fig. 4) et appliquons-lui le *théorème* suivant:

Dans un triangle rectangle, le carré construit sur un côté de l'angle droit est équivalent au rectangle construit sur l'hypoténuse entière et la projection de ce côté sur l'hypoténuse:

$$\alpha = 90^\circ \ , \qquad c^2 = aa' \ .$$

Supposons que le sommet A se déplace sur la hauteur h', a et a' restant invariables.

1° Si A s'éloigne de a, donc si α diminue et devient par conséquent *aigu*, le carré construit sur le côté (c) *augmente du rectangle bb''*, car on a alors, d'après le théorème III relatif au triangle *acutangle*,

$$\alpha < 90^\circ \ , \qquad \underline{c^2 = aa' + bb''} \ .$$

2° Si par contre A se rapproche de a, donc si α augmente et devient par conséquent *obtus*, le carré construit sur le côté (c) *diminue du rectangle bb''*, car on a, dans ce cas, d'après le théorème III' applicable au triangle *obtusangle* en A,

$$\alpha > 90^\circ \ , \qquad \underline{c^2 = aa' - bb''} \ .$$

D'ailleurs, pour $\alpha = 90^\circ$, la troisième des formules (3)

$$c^2 = aa' + bb''$$

devient précisément, b'' étant nul,

$$\alpha = 90^\circ \ , \qquad c^2 = aa' \ .$$

Le théorème III, ou plus généralement la relation

$$c^2 = aa' \pm bb''$$

relative au triangle acutangle ou obtusangle en A, est donc la GÉNÉRALISATION du théorème ci-dessus relatif au triangle *rectangle*.

En tenant compte de la règle des signes des segments, le *théorème généralisé* peut s'énoncer comme suit et il remplace alors les théorèmes III et III′:

Dans un triangle QUELCONQUE, *le carré construit sur l'un quelconque des côtés est équivalent à la somme algébrique des rectangles construits sur chacun des deux autres côtés et la projection du premier sur lui.*

4. — Somme des carrés construits sur trois segments non consécutifs.

PREMIER CAS. — Triangle *acutangle* (fig. 5).

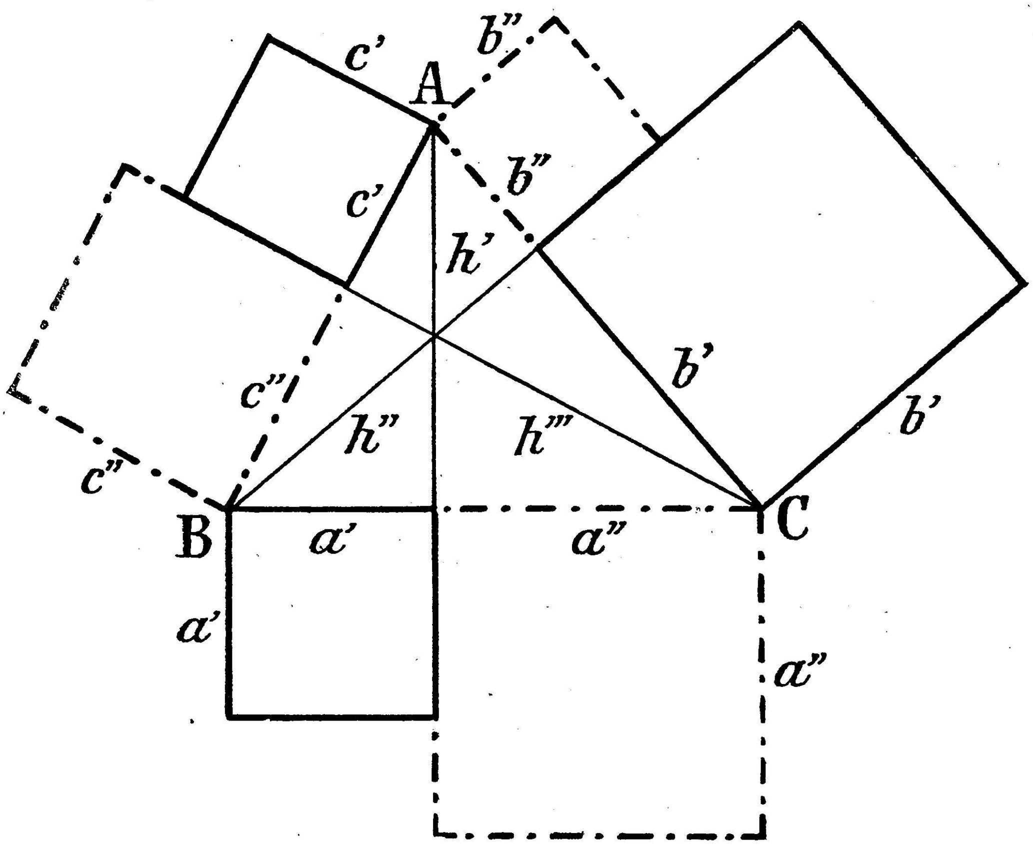

Fig. 5.

Les formules (2), sous leur première forme, peuvent s'écrire, en considérant que $a = a' + a''$, $b = b' + b''$, $c = c' + c''$,

$$h'^2 = a'a'' + bb'' = a'a'' + b'b'' + b''^2 ,$$
$$h''^2 = b'b'' + cc'' = b'b'' + c'c'' + c''^2 ,$$
$$h'''^2 = c'c'' + aa'' = c'c'' + a'a'' + a''^2 ,$$

d'où

$$(\alpha) \quad h'^2 + h''^2 + h'''^2 = (a''^2 + b''^2 + c''^2) + 2.(a'a'' + b'b'' + c'c'') .$$