Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1926)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES HAUTEURS D'UN TRIANGLE
Autor: Streit, Dr Phil. A.
Kapitel: 6. — Conséquences résultant des formules du groupe (3),
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20669

Ces deux relations signifient que:

La somme des carrés construits sur les côtés d'un triangle est égale à la somme des trois rectangles construits sur chaque côté et le double d'un des segments correspondants, les trois segments devant être non consécutifs.

Chacune des deux relations précédentes conduit au théorème IV. La seconde peut s'écrire

$$(a' + a'')^2 + (b' + b'')^2 + (c' + c'')^2 =$$
$$= 2[(a' + a'')a' + (b' + b'')b' + (c' + c'')c'] ,$$

d'où résulte

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2) + (a''^2 + b''^2 + c''^2) = 2[a'^2 + b'^2 + c'^2] .$$

Par suite

$$\underline{a'^2 + b'^2 + c'^2 = a''^2 + b''^2 + c''^2} ,$$

ce qui est la relation du théorème IV.

5° Le *théorème V* peut se démontrer directement comme suit:

On a

$$b^2 = aa'' \quad \text{et} \quad c^2 = aa' ,$$

d'où

$$b^2 - c^2 = a(a'' - a') = (a'' + a')(a'' - a') ,$$

ou

$$\underline{b^2 - c^2 = a''^2 - a'^2} .$$

6. — Conséquences résultant des formules du groupe (3).

1° Menons les hauteurs h' et h'' issues des sommets A et B d'un triangle ABC et prolongeons-les jusqu'à leurs points d'intersection T et K avec les circonférences décrites sur les côtés opposés BC et AC comme diamètres. Puis dessinons des circonférences avec les extrémités A et B du troisième côté comme centres et leurs distances à ces points K et T comme rayons (fig. 6).

Soit M un point d'intersection de celles-ci. D'après la troisième des formules (3) on a

$$c^2 = aa' + bb'' ,$$

ou

$$c^2 = \overline{BT}^2 + \overline{AK}^2 = \overline{BM}^2 + \overline{AM}^2 .$$

Par suite, M *est situé sur la circonférence décrite sur* AB *comme diamètre.*

En outre, soit X le point d'intersection de cette circonférence et de la troisième hauteur h''' situé du même côté de AB que M. Nous avons

$$\overline{AX}^2 = cc' = bb'' .$$

Mais

$$\overline{AM}^2 = \overline{AK}^2 = bb'' .$$

Donc

$$AM = AX .$$

On en conclut que M est confondu avec X.

Nous sommes donc conduits au théorème suivant:

THÉORÈME VI. — *Si l'on décrit des circonférences ayant pour centres les extrémités d'un côté d'un triangle acutangle et pour rayons leurs distances aux points d'intersection des hauteurs qui en partent avec les circonférences décrites sur les côtés opposés comme diamètres, ces circonférences se coupent aux points d'intersection de la troisième hauteur et de la circonférence décrite sur le côté opposé comme diamètre.*

Du théorème ci-dessus découle le suivant:

THÉORÈME VII. — *Si sur deux côtés d'un triangle comme diamètres on décrit des circonférences, elles sont coupées par les hauteurs correspondantes en quatre points situés sur une circonférence ayant pour centre le point d'intersection des deux côtés considérés* (fig. 6).

Démonstration. — D'après le théorème qui précède, les circonférences (AK) et (BT) de centres A et B se coupent aux points d'intersection M et P de la circonférence de diamètre AB et de la hauteur correspondante h'''. De même, les circonférences (AK) et (CT) de centres A et C se coupent aux points d'intersection K et Q de la circonférence de diamètre AC et de la hauteur correspondante h''. Les quatre points M, P, K, Q sont donc bien sur une même circonférence de centre A (rayon AK).

Première remarque. — AP et AM sont des tangentes au cercle de rayon BP, car AP est perpendiculaire au rayon BP et AM perpendiculaire au rayon BM de ce cercle. De même, AK et AQ sont des tangentes au cercle de rayon CK. Même remarque concernant les quatre segments respectifs issus de B et de C: B P, par exemple, est tangent au cercle de rayon AP. Les circonférences AK, BP et CT se coupent donc à angle droit.

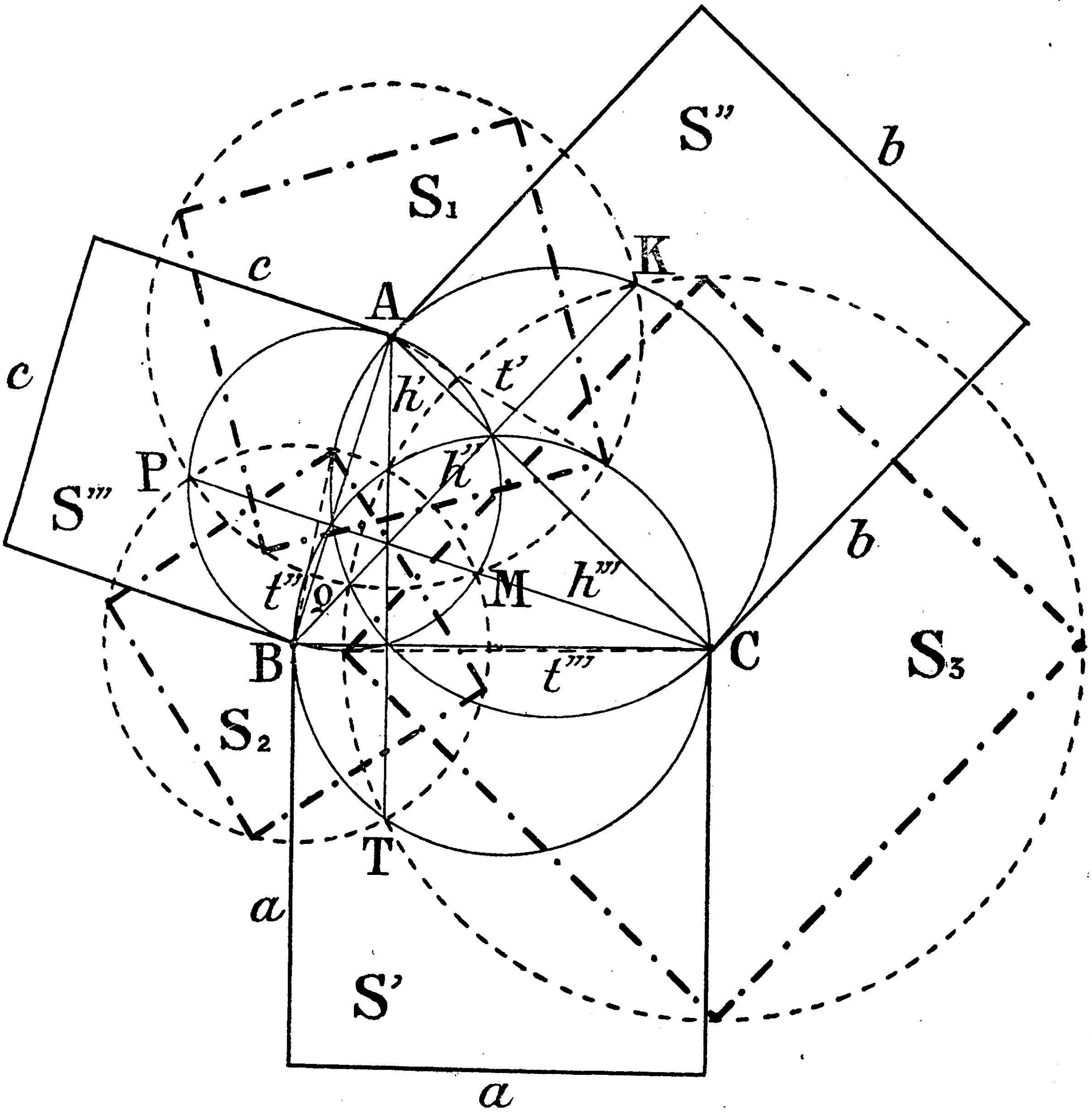

Fig. 6.

Deuxième remarque. — Les trois circonférences de centres A, B, C et de rayons AK, BP, CT auxquelles donne lieu le théorème VII ont pour *centre radical* l'orthocentre du triangle.

En effet, du théorème VI résulte que les cordes communes à ces trois circonférences sont les hauteurs du triangle ABC.

2° Mettons les formules (3) sous une autre forme. Considérons dans ce but un cercle de rayon r; choisissons un point extérieur quelconque P et joignons-le aux extrémités d'un diamètre quelconque A B, puis envisageons le triangle A B P ainsi obtenu (fig. 7).

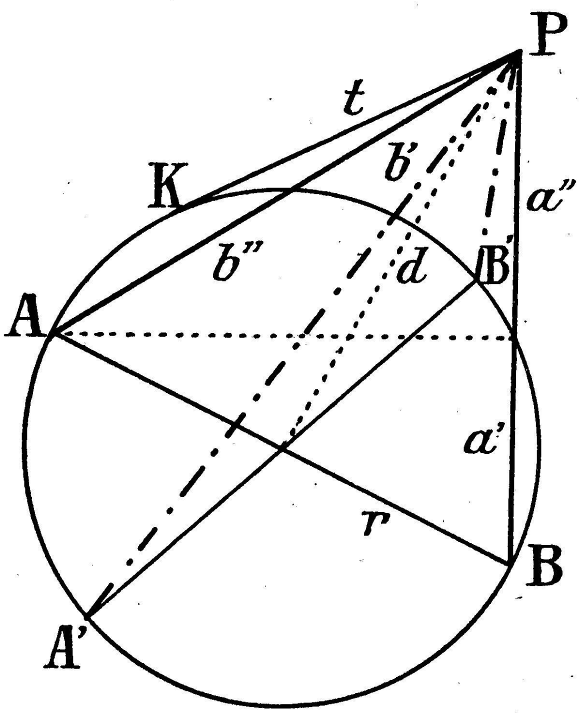

Fig. 7.

Soit BP $= a$, PA $= b$, AB $= c$.

Appliquons le théorème III au côté AB; on a

$$c^2 = aa' + bb'' ,$$

$$c^2 = a(a - a'') + b(b - b') ,$$

d'où

$$a^2 + b^2 - 2t^2 = 4r^2 ,$$

ou

$$\underline{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 - 2t^2 = 4r^2} . \qquad (6)$$

Pour le même cercle, la valeur du premier membre est constante, donc indépendante de la position du point extérieur P et de celle du diamètre AB.

a) En désignant par d la distance du point P supposé fixe au centre, on a $t^2 = d^2 - r^2$ et en portant cette valeur dans la relation ci-dessus, elle devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (r\sqrt{2})^2 + (d\sqrt{2})^2 = \text{const}} , \\ \underline{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{PA'}^2 + \overline{PB'}^2 = \text{const}} , \end{array} \right. \qquad (7)$$

c'est-à-dire (fig. 7)

THÉORÈME VIII. — *Pour le même cercle, la somme des carrés construits sur les distances d'un point extérieur* FIXE *aux extrémités d'un diamètre quelconque est constante et égale à la somme des carrés inscrits dans le cercle donné et le cercle ayant pour rayon la distance du point au centre du cercle donné.*

b) En supposant d constant ($=$ R), c'est-à-dire le point P mobile sur un cercle concentrique au cercle donné, on obtient (fig. 8)

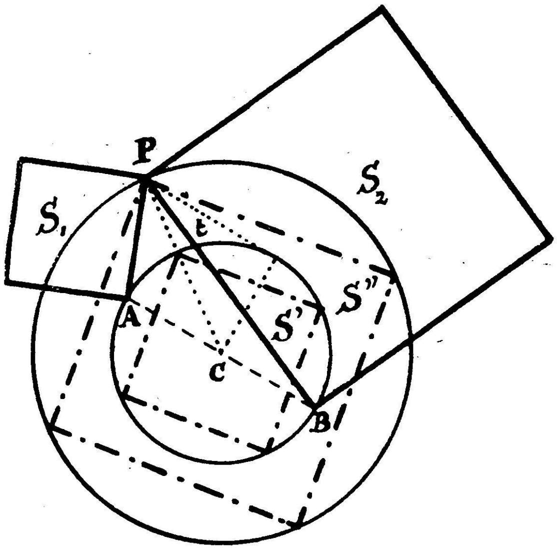

Fig. 8.

ou
$$\left\{\begin{aligned} &\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = (r\sqrt{2})^2 + (R\sqrt{2})^2 = \text{const}\ , \\ &\underline{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = \overline{P'A'}^2 + \overline{P'B'}^2 = \text{const}} \end{aligned}\right. \qquad (7')$$

pour tous les points P, P$'$, ... sur la circonférence R et tous les diamètres AB, A$'$B$'$, ... du cercle r; c'est-à-dire

THÉORÈME VIII$'$. — *La somme des carrés construits sur les distances d'un point quelconque d'un cercle aux extrémités d'un diamètre quelconque d'un cercle intérieur concentrique est constante et égale à la somme des carrés inscrits dans les deux cercles* (fig. 8):

$$S_1 + S_2 = S' + S'' \ .$$

3° Soit ABC un triangle acutangle. Décrivons une circonférence sur chaque côté comme diamètre et menons-lui une tangente du sommet opposé; appelons a, b, c les côtés du triangle, r', r'', r''' les rayons des circonférences correspondantes et t', t'', t''' les longueurs des tangentes en question (fig. 6).

D'après la relation (6), on a successivement, en envisageant d'abord le cercle de diamètre AB et le point extérieur C, puis le cercle de diamètre BC et le point extérieur A, et enfin le cercle de diamètre CA et le point extérieur B:

$$a^2 + b^2 - 2t'''^2 = 4r'''^2 = c^2 ,$$
$$b^2 + c^2 - 2t'^2 = 4r'^2 = a^2 ,$$
$$c^2 + a^2 - 2t''^2 = 4r''^2 = b^2 ,$$

d'où, en additionnant membre à membre

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 = (t'\sqrt{2})^2 + (t''\sqrt{2})^2 + (t'''\sqrt{2})^2} , \tag{8}$$

ou

$$\underline{S' + S'' + S''' = S_1 + S_2 + S_3} ,$$

c'est-à-dire

THÉORÈME IX. — *La somme des carrés construits sur les trois côtés d'un triangle acutangle est équivalente à la somme des carrés inscrits dans les trois cercles ayant pour centres les sommets du triangle et pour rayons respectifs les tangentes menées de ces sommets aux circonférences décrites sur les côtés opposés comme diamètres.*

Or le cercle de centre A et de rayon t', par exemple, n'est autre que le cercle de centre A et de rayon AK. En effet, le triangle AKC étant inscrit dans une demi-circonférence, l'angle en K est droit et l'on a

$$\overline{AK}^2 = bb'' .$$

D'autre part, d'après le théorème des sécantes

$$t'^2 = bb'' .$$

Par suite

$$AK \text{ (ou AP)} = t' .$$

De même

$$BP \text{ (ou BT)} = t'' ,$$

et

$$CT \text{ (ou CK)} = t''' .$$

C'est donc dans les cercles de centres A, B, C *et de rayons respectifs* AK, BP, CT *que doivent être inscrits les trois carrés dont il est question dans le théorème ci-dessus* (AK, par exemple, désignant la distance du sommet A à l'un des points d'intersection K d'une des hauteurs non correspondantes avec la circonférence décrite sur le côté opposé à celle-ci comme diamètre).

Les cercles de centres A, B, C et de rayons AK, BP et CT coupent respectivement à angle droit les cercles décrits sur les côtés opposés a, b, c comme diamètres.

7. — Somme des hauteurs d'un triangle.

a) Segments supérieurs (fig. 9).

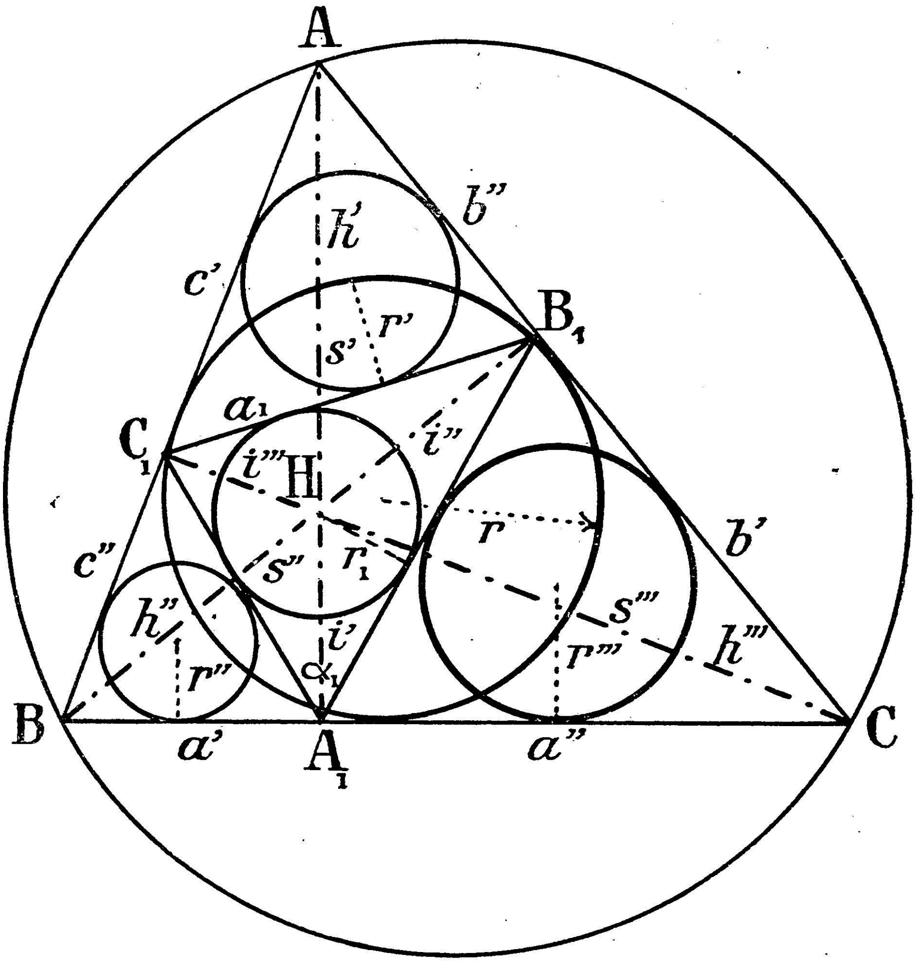

Fig. 9.

$$s' = \frac{b''}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin\gamma}\cos\alpha \ .$$

$$\left\{\begin{aligned} s' &= 2R\cos\alpha \ , \\ s'' &= 2R\cos\beta \ , \\ s''' &= 2R\cos\gamma \ . \end{aligned}\right. \qquad (9)$$

$$s' + s'' + s''' = 2R[\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma] \ .$$