Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA CLASSIFICATION DES SURFACES DU SECOND ORDRE AU MOYEN DE LEURS GÉNÉRATRICES

Autor: Green, H. G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20671

La tangente en A_1 est la droite homologue de la courbe Γ_{n-1} passant par A_1.

La tangente en un sommet quelconque du faisceau Γ_{n-1} est la tangente à la courbe Γ_{n-1} homologue de la droite A_1 joignant A_1 au sommet considéré.

Cette propriété constitue, en se plaçant à un autre point de vue, une nouvelle généralisation du théorème de Chasles.

Inversement il est immédiat que le lieu des points d'intersection de deux tels faisceaux homographiques est une courbe algébrique d'ordre $\leq n$.

LA CLASSIFICATION DES SURFACES DU SECOND ORDRE AU MOYEN DE LEURS GÉNÉRATRICES

PAR

H. G. GREEN, M.A.
(University College, Nottingham, England).

---

1. — Dans cette étude nous nous proposons d'établir la classification des quadriques au moyen de leurs génératrices rectilignes en nous affranchissant des restrictions concernant les axes de référence. Cette méthode a en outre l'avantage de conduire à des équations dont l'emploi est particulièrement utile lorsqu'il s'agit de la résolution numérique de problèmes relatifs aux quadriques.

2. — *Notation.* Prenons l'équation générale du second degré sous la forme

$$F \equiv u_2 + u_1 + u_0 = 0 ,$$

où

$$u_2 \equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy ,$$

$$u_1 \equiv 2ux + 2vy + 2wz ,$$

$$u_0 \equiv d .$$

Soient

$$D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} , \qquad S = \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & d \end{vmatrix} ,$$

et A, B, C, F, G, H les coefficients de a, b, c, f, g, h dans le développement de D. Pour abréger nous représenterons l'équation du plan par $P = 0$, $Q = 0$, $L = 0$, $M = 0$, etc., et les projections sur un des plans coordonnés des intersections de ces plans avec un plan arbitraire par $p = 0$, $q = 0$, $l = 0$, $m = 0$, etc.

I. — $D \neq 0$.

Nous supposerons d'abord $D \neq 0$ (u_2 n'est pas un produit de facteurs linéaires).

3. — On peut mettre $F = 0$ sous la forme

$$u_2 - ku_1^2 + ku_1^2 + u_1 + u_0 = 0 ,$$

où k est un nombre.

Considérons l'équation $u_2 - ku_1^2 = 0$, qui est homogène et du second degré. Elle représente un cône dont $u_1 = 0$ est un plan de double contact avec le cône $u_2 = 0$. Pour discuter cette équation on peut employer exactement les mêmes méthodes que celles de la géométrie des coniques.

4. — La condition pour que $u_2 - ku_1^2$ soit un produit de facteurs linéaires est

$$\begin{vmatrix} a - 4ku^2 & h - 4kuv & g - 4kuw \\ h - 4kuv & b - 4kv^2 & f - 4kvw \\ g - 4kuw & f - 4kvw & c - 4kw^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

qui se ramène à

$$D + 4k(S - dD) = 0 ,$$

où D, S sont définis comme ci-dessus.

Si $S - dD \neq 0$, nous obtenons pour k une valeur finie, pour laquelle nous pouvons mettre $u_2 - ku_1^2$ sous la forme PQ ou sous la forme $\pm (P^2 + Q^2)$, selon que les intersections du cône avec le plan $u_1 = 0$ sont réelles ou imaginaires. De plus, puisque u_2 n'a pas de facteurs, les plans $P = 0$, $Q = 0$, qui passent par l'origine ne sont pas identiques, et leur droite d'intersection n'est pas située dans le plan $u_1 = 0$.

Nous pouvons remplacer $ku_1^2 + u_1 + u_0$ par LM où $L = 0$, $M = 0$, sont deux plans parallèles au plan $u_1 = 0$, ou par $\pm (L^2 + \nu^2)$ où $L = 0$ est un plan parallèle au plan $u_1 = 0$ et ν est un nombre.

5. — De ces différentes formes nous choisissons toujours la réelle. Nous allons obtenir les expressions algébriques qui caractérisent les formes réelles, mais dans le cas numérique il est plus simple de déterminer la forme désirée directement.

$(ku_1^2 + u_1 + u_0)$ a des facteurs réels et distincts L, M, si l'équation $ku_1^2 + u_1 + u_0 = 0$, étant du second degré en u_1, a des racines réelles, c'est-à-dire si

$$1 > 4ku_0 = 4kd = dD/(dD - S) .$$

Ceci est prouvé si $d = 0$.

Si $d \neq 0$, la condition est équivalente à $S/dD < 0$ ou > 1.

Si $S = 0$, les racines sont égales.

Quand les racines sont imaginaires l'expression est équivalente à $+(L^2 + \nu^2)$ ou $-(L^2 + \nu^2)$, selon que k est positif ou négatif.

Prenant l'expression dans sa forme convenable on peut écrire la projection d'une intersection par un plan quelconque sous l'une des formes $lm = 0$, $+(l^2 + \nu^2) = 0$, $-(l^2 + \nu^2) = 0$, dans la notation du § 2, qu'on peut ramener à une forme $\pm l'^2 + l'' = 0$ où $l' = 0$, $l'' = 0$ sont parallèles au plan $u_1 = 0$ et le signe étant celui de k.

Quant à la discussion des facteurs de $u_2 - ku_1^2$, nous allons employer le résultat des coniques. Suivant la notation usuelle, posons $u = \dfrac{bX^2 - 2hXY + aY^2}{ab - h^2}$ ou égal aux deux expressions analogues; les facteurs sont réels si $ab - h^2 < 0$.

Les facteurs P, Q seront réels si l'on a

$$(a - 4ku^2)(b - 4kv^2) - (h - 4kuv)^2 < 0 .$$

Or

$$(a - 4ku^2)(b - 4kv^2) - (h - 4kuv)^2$$

$$= ab - h^2 - \frac{D}{dD - S}(bu^2 + av^2 - 2huv)$$

$$= ab - h^2 - \frac{D}{dD - S}(bu^2 + av^2 - 2huv)$$

$$= \frac{C(Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + 2Fvw + 2Gwu + 2Huv) - D(bu^2 + av^2 - 2huv)}{dD - S}$$

$$= \frac{G^2u^2 + F^2v^2 + C^2w^2 + 2FCvw + 2CGwu + 2GFuv}{dD - S}$$

$$= \frac{(Gu + Fv + Cw)^2}{dD - S},$$

de là la condition pour que P, Q soient réels est que $dD - S < 0$.

[$Gu + Fv + Cw$ ne peut pas être zéro car, dans ce cas, les deux termes pareils le seraient aussi avec les alternatives correspondantes ou $D = 0$, ou $u, v, w = 0$ qui conduit à $dD - S = 0$.]

Si $dD - S$ est positif les facteurs sont imaginaires. Les quantités de la forme $a - 4ku^2$ ont toutes le même signe et nous employons les formes $\pm (P^2 + Q^2)$ suivant qu'ils sont positifs ou négatifs.

[On peut écrire l'expression caractéristique pour ce signe sous la forme symétrique $(a + b + c) - 4k(u^2 + v^2 + w^2)$.]

6. — Cas spéciaux quand il faut modifier le procédé du § 4.

(1) Le terme u_1 ne se présente pas. Insérant quelque terme de la forme ku_1^2 où le plan $u_1 = 0$ ne touche pas le cône $u_2 = 0$, $F = u_2 - ku_1^2 + ku_1^2 + u_0$ et nous pouvons procéder comme ci-dessus.

(2) Si le plan $u_1 = 0$ touche le cône $u_2 = 0$ au point

$$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma$$

de sorte que

$$u_1 = 2\sigma\{x(a\alpha + h\beta + g\gamma) + y(h\alpha + b\beta + f\gamma) + z(g\alpha + f\beta + c\gamma)\}$$

$= 2\sigma T$ pour abréger, σ étant une constante. Puisque (α, β, γ) est sur le cône, $u_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, et

$$u_2(x, y, z) + u_1(x, y, z) + u_0 = u_2(x, y, z) + 2\sigma T + \sigma^2 u_2(\alpha, \beta, \gamma) + u_0$$
$$= u_2(x + \sigma\alpha, y + \sigma\beta, z + \sigma\gamma) + u_0 .$$

De là, en changeant l'origine au point $(-\sigma\alpha, -\sigma\beta, -\sigma\gamma)$, l'équation $u_2 + u_1 + u_0 = 0$ est réduite à $u_2 + u_0 = 0$, du type résolu au cas spécial (1).

[Il est facile de vérifier que dans tous ces deux cas spéciaux $d\mathrm{D} - \mathrm{S} = 0$; et dans l'évaluation de k ou dans la détermination de la forme, on peut faire usage des valeurs de u, v, w qui se rapportent au terme inséré.]

7. — Analyse des formes obtenues par le procédé de § 4.

(A) La forme $\mathrm{PQ} + \mathrm{LM} = 0$.

Nous pouvons la mettre sous l'une des deux formes suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{P} &= \lambda \mathrm{L} \\ \mathrm{Q} &= -\mathrm{M}/\lambda \end{aligned}\right\}, \qquad \left.\begin{aligned} \mathrm{P} &= \mu \mathrm{M} \\ \mathrm{Q} &= -\mathrm{L}/\mu \end{aligned}\right\},$$

où λ et μ sont paramètres, et nous obtenons deux systèmes de lignes droites ou génératrices qui donnent la surface. Considérant la section déterminée par un plan arbitraire, la projection sur un plan coordonné est $pq + lm = 0$, une conique réelle; c'est-à-dire tous les plans font naître des sections réelles dont quelques-unes sont des hyperboles (par exemple la section par un plan $\mathrm{L} =$ constante), — l'hyperboloïde à une nappe.

(B) La forme $\mathrm{PQ} + \mathrm{L}^2 + \nu^2 = 0$.

Dans la forme paramétrique nous avons

$$\mathrm{P} = \lambda(\mathrm{L} \pm \iota\nu),$$
$$\mathrm{Q} = -\frac{1}{\lambda}(\mathrm{L} \mp \iota\nu),$$

où les systèmes de génératrices sont imaginaires. Les plans $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$ divisent l'espace à trois dimensions en quatre régions et la section d'un plan $\alpha\mathrm{P} + \beta\mathrm{Q} = 0$ avec $\mathrm{F} = 0$ sera réelle ou imaginaire suivant que le plan se trouve en une région dans laquelle les coordonnées x, y, z rendent le produit PQ positif ou négatif: tous les plans par conséquent ne coupent pas la surface suivant des courbes réelles et la surface est bornée par les plans $\mathrm{P} = 0$, $\mathrm{Q} = 0$. La projection de la section, $pq + \nu^2 = 0$, par le plan $\mathrm{L} = 0$, a les asymptotes réelles pq, puisque, comme on l'a déduit de la construction des plans, ces lignes sont distinctes et non-parallèles. C'est le cas de l'hyperboloïde à deux nappes.

(C) La forme $P^2 + Q^2 + LM = 0$.

Suivant la manière de (B), on trouve que les génératrices sont imaginaires et que la surface est limitée par les plans $L = 0$, $M = 0$. La projection de la section obtenue par un plan quelconque est de la forme $p^2 + q^2 \pm l'^2 + l'' = 0$, le signe de l' étant positif ou négatif suivant que $\{(a + b + c) - 4k(u^2 + v^2 + w^2)\}/k$ est positif ou négatif. Si le signe est positif les asymptotes sont toujours imaginaires et nous avons donc le cas de l'ellipsoïde: s'il est négatif les asymptotes peuvent être réelles (par exemple si la section est faite par le plan $P = 0$) et la surface est une hyperboloïde à deux nappes.

(D) La forme $P^2 + Q^2 \pm (L^2 + \nu^2) = 0$.

Le signe est obtenu comme dans (C). S'il est positif la surface est imaginaire, s'il est négatif l'équation peut donc s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} F &= (P^2 - L^2) + (Q^2 - \nu^2) \\ &= (P - L)(P + L) + (Q - \nu)(Q + \nu), \end{aligned}$$

ou nous obtenons de nouveau la forme (A); c'est-à-dire l'hyperboloïde à une nappe.

(E) Cas où les plans $L = 0$, $M = 0$ coïncident.

(1) $PQ \pm L^2 = 0$; les génératrices sont d'un type, $P = \lambda L$, $Q = \mp \frac{1}{\lambda} L$, passent par un point fixe, et nous avons un cône.

(2) $P^2 + Q^2 - L^2 = 0$; on peut écrire l'équation $(P - L)(P + L) + Q^2 = 0$, se ramenant au cas (1).

(3) $P^2 + Q^2 + L^2 = 0$; la surface est entièrement imaginaire.

II. — $D = 0$.

8. — Puisque $D = 0$, on peut écrire l'équation de la surface sous la forme $PQ + R = 0$, où P, Q peuvent être réels ou imaginaires. L'équation de leur intersection est en général $xF = yG = zH$.

9. — L'équation d'une surface peut alors s'exprimer sous la forme paramétrique

$$\left.\begin{aligned} R + \lambda P &= 0 \\ Q &= \lambda \end{aligned}\right\}$$

où λ est un nombre arbitraire, et, pour chaque valeur de λ, nous avons une ligne droite, parallèle au plan $Q = 0$. Nous obtiendrons de même la surface par le système des lignes droites

$$\left.\begin{aligned} R + \mu Q &= 0 \\ P &= \mu \end{aligned}\right\}$$

parallèles au plan $P = 0$. Ensuite, nous avons, en général, deux systèmes distincts de génératrices, et chaque système est toujours parallèle à un plan fixe.

La section projectée par le plan $\alpha P + \beta Q + \gamma = 0$ est de la forme $(\varepsilon l + \delta)(\varepsilon' l + \delta') + r = 0$, où la ligne $l = 0$ est parallèle à $P = Q = 0$, et est une parabole. Puisqu'on peut écrire la surface dans la forme $4R + (P + Q)^2 - (P + Q)^2 = 0$ les courbes obtenues par d'autres plans sont des hyperboles ou des ellipses suivant que P et Q sont réels ou imaginaires conjuguées. C'est pourquoi les termes parabolique, hyperbolique et elliptique conviennent dans les deux cas.

10. — Cas spéciaux où il faut modifier l'exposé du § 9.

(A) Si on peut écrire R sous la forme $\alpha P + \beta Q + d$, la ligne d'intersection de $P = 0$, $Q = 0$ est parallèle au plan $R = 0$. Les systèmes λ, μ des génératrices ne sont pas distincts et sont parallèles à la ligne $P = Q = 0$. La surface est alors un cylindre. La section par un plan arbitraire, projetée sur un plan coordonné, prend la forme $pq + \alpha p + \beta q + d = 0$, laquelle est une hyperbole ou une ellipse suivant que les facteurs sont réels ou imaginaires avec un cas exceptionnel quand $\alpha\beta = d$. De là, si $D = 0$ et $\frac{u}{F} + \frac{v}{G} + \frac{w}{H} = 0$, la surface est un cylindre hyperbolique ou elliptique suivant que les facteurs de u_2 sont réels ou imaginaires, avec le cas exceptionnel quand $\alpha\beta = d$.

(B) Soit dans (A) $\alpha\beta = d$. La surface peut être décomposée en deux plans $P + \beta = 0$, $Q + \alpha = 0$. En effet, la condition pour qu'on ait deux plans est $D = 0$, $\frac{u}{F} + \frac{v}{G} + \frac{w}{H} = 0$, et $d = \alpha\beta$.

On peut ramener cette dernière relation à une forme plus usuelle, ainsi qu'il suit, quoique celle qui a été donnée soit souvent plus utile dans les cas numériques.

Soit (x, y, z) un point quelconque sur la droite d'intersection des plans $P + \beta = 0$, $Q + \alpha = 0$. Nous avons aussi, pour ce point (x, y, z), $R = \alpha P + \beta Q + d = d - 2\alpha\beta$, ou $R + d = 2(d - \alpha\beta)$. C'est pourquoi les conditions peuvent être exprimées comme $D = 0$, et les plans $P + \beta = 0$, $Q + \alpha = 0$, $R + d = 0$ doivent posséder une ligne commune. Puisque l'intersection des deux premiers est parallèle au troisième, il sera suffisant si, par addition, nous trouvons la condition pour qu'un point quelconque de la ligne soit sur le troisième plan.

Soit $P = l_1x + m_1y + n_1z$, $Q = l_2x + m_2y + n_2z$, où les coefficients des coordonnées sont constants. La ligne d'intersection sera également donnée par deux des équations

$$l_1(P + \beta) + l_2(Q + \alpha) = 0\ , \qquad m_1(P + \beta) + m_2(Q + \alpha) = 0\ ,$$
$$n_1(P + \beta) + n_2(Q + \alpha) = 0$$

ce qui est équivalent à $\dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial F}{\partial z} = 0$, et la ligne est $xF - fu = yG - gv = zH - hw = \rho$; si le point $\rho = 0$ se trouve sur le plan $R = 0$, nous devons avoir

$$\frac{fu^2}{F} + \frac{gv^2}{G} + \frac{hw^2}{H} + d = 0\ ,$$

ou la troisième condition est dans la forme usuelle.

(C) Si cependant d'abord, $P \equiv Q$, ce qui est le cas quand $D = 0$ et $A = B = C = F = G = H = 0$, la surface peut être réduite à la forme $P^2 + R = 0$, ou $P - \lambda = 0$, $R + \lambda^2 = 0$, et est composée de droites parallèles à $P = R = 0$ (si $P = 0$, $R = 0$ ne sont pas elles-mêmes parallèles, c'est-à-dire si $uf - vg$, etc. ne sont pas tous nuls). Considérant une section par un plan non parallèle aux génératrices nous trouvons que la surface est un cylindre parabolique ayant les génératrices parallèles à la ligne $P = R = 0$.

(D) Quand dans (C) $P = 0$ est parallèle à $R = 0$, *i.e.* $P \equiv Q \equiv (R - \beta)/\alpha$, la surface se décompose en deux plans parallèles, $P^2 + \alpha P + \beta = 0$.

11. — Pour illustrer ce qui précède, nous examinerons quelques *exemples numériques.*

Notation additionnelle;

$$S' = \begin{vmatrix} a & h & g & u \\ h & b & f & v \\ g & f & c & w \\ u & v & w & o \end{vmatrix} = S - dD ,$$

ou $D + 4kS' = 0$.

Etablir la classification et, dans le cas des génératrices réelles, trouver la forme génératrice des quadriques suivantes:

Exemple 1.

$$x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 5yz + 5zx + 9xy + 3x - 3y - 2 = 0 .$$

$$D = 1 , \quad S' = 9/4 , \quad k = -1/9 .$$

$$P, Q : u_2 - ku_1^2 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 5yz + 5zx + 9xy + (x-y)^2$$
$$= 2x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 5yz + 5zx + 7xy ,$$
$$49 - 4.2.3 = +25 ,$$

facteurs réels P.Q;

$$L, M : ku_1^2 + u_1 + u_0 = -(x-y)^2 + 3(x-y) - 2 ,$$

facteurs réels L.M.

Type: Hyperboloïde à une nappe (A§7), et pour les génératrices

$$PQ = (x + 3y + 2z)(2x + y + z) ,$$
$$LM = -(x - y - 2)(x - y - 1) .$$

Exemple 2.

$$3x^2 + 7y^2 + z^2 + 5yz + 3zx + 5xy - 2x + 2y + 2 = 0 .$$
$$D = -1 , \quad S' = 1 , \quad k = 1/4 .$$

$$P, Q : u_2 - ku_1^2 = 3x^2 + 7y^2 + z^2 + 5yz + 3zx + 5xy - (x-y)^2$$
$$= 2x^2 + 6y^2 + z^2 + 5yz + 3zx + 7xy ,$$
$$49 - 4.2.6 = +1 ,$$

facteurs réels P.Q;

$$L, M : ku_1^2 + u_1 + u_0 = (-x + y)^2 + 2(-x + y) + 2 ,$$

facteurs imaginaires $+ (L^2 + \nu^2)$.

Type: Hyperboloïde à deux nappes (B §7).

Exemple 3.

$$3x^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 10xy + 2x - 2y = 0 .$$

$$D = -18 , \quad S' = -9 , \quad k = -1/2 .$$

$$P , Q : u_2 - ku_1^2 = 3x^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 10xy + 2(x-y)^2$$
$$= 5x^2 + 2y^2 + z^2 + 2yz + 2zx + 6xy ,$$
$$36 - 4.5.2 = -4 ,$$

facteurs imaginaires $+ (P^2 + Q^2)$;

$$L , M : ku_1^2 + u_1 + u_0 = -\frac{1}{2}(u_1^2 - u_1) ,$$

facteurs réels.

Type: Hyperboloïde à deux nappes (C § 7, cas 2).

Exemple 4.

$$2x^2 - y^2 - 4z^2 - 5yz - 7zx - xy + 4(x + y + z + 1) = 0 .$$

$D = 0$, et les facteurs de u_2 sont réels puisque $1 - 4.2.(-1)$ est positif.

$$PQ = u_2 = (x - y - 4z)(2x + y + z) ;$$

$$R : \begin{vmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 ,$$

R n'est pas de la forme $\alpha P + \beta Q + d$.

Type: Paraboloïde hyperbolique, $PQ + R = 0$ (§ 9).

Exemple 5.

$$3x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2yz + 11zx + 7xy - 7x - 4y - 2z - 1 = 0 .$$

$D = 0$, et les facteurs de u_2 sont réels puisque $49 - 4.3.2$ est positif.

$$PQ = U_2 = (3x + y - z)(x + 2y + 4z) ;$$

$$R : \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \\ -7 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

et la forme est $PQ - (2P + Q) - 1 = 0$; irréductible.

Type: Cylindre hyperbolique (A §10), ayant les génératrices

$$P = \lambda\ , \qquad Q(\lambda - 1) = 2\lambda + 1\ ,$$

où

$$P = 3x + y - z\ , \qquad Q = x + 2y + 4z\ .$$

Exemple 6.

$$3x^2 + 2y^2 - 4z^2 + 2yz + 11zx + 7xy - 7x - 4y - 2z + 2 = 0\ .$$

C. f. ex. 5. La forme est

$$PQ - (2P + Q) + 2 = 0\ , \qquad \text{ou} \qquad (P - 1)(Q - 2) = 0\ .$$

Type: Deux plans qui se coupent (B §10).
Exemple 7, cas particuliers.

$$8x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6yz + 8zx + 14xy - 6x - 3y - 2z - 4 = 0\ .$$

$D = -2$, $S' = 0$, le plan $u_1 = 0$ touche le cône $u_2 = 0$; par une translation convenable l'équation se ramène à

$$8x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6yz + 8zx + 14xy - 4 = 0\ .$$

Introduisons

$$-kx^2 + kx^2\ , \qquad \text{où} \qquad \begin{vmatrix} (8-k) & 7 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0\ , \qquad k = -2\ .$$

$P, Q : u_2 + 2x^2\ ;\quad 3^2 - 5.2 = -1$ facteurs imaginaires $+ (P^2 + Q^2)\ ;$
$L, M : -2x^2 - 4\ ,$ » » $-(2x^2 + 4)\ .$

Type: Hyperboloïde à une nappe (D §7).
Trouver la forme génératrice:

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 &= 10x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 6yz + 8zx + 14xy\ , \\ &= (x + y + z)^2 + (3x + 2y + z)^2\ , \end{aligned}$$

l'équation de la surface est

$$\begin{aligned} &\{(1 + \sqrt{2})x + y + z\}\{(1 - \sqrt{2})x + y + z)\} \\ &\qquad + (3x + 2y + z + 2)(3x + 2y + z - 2) = 0\ , \end{aligned}$$

se reporter à une nouvelle origine $(-\alpha, -\beta, -\gamma)$ ou

$$\left.\begin{aligned} 8\alpha + 7\beta + 4\gamma &= -3 \\ 7\alpha + 5\beta + 3\gamma &= -3/2 \\ 4\alpha + 3\beta + 2\gamma &= -1 \end{aligned}\right\} \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = -1, \quad \gamma = 0 .$$

(8) *Problème. Etant donnée la quadrique* $2x^2 + 6y^2 + z^2 + 5yz + 3zx + 7xy - x + y - z + 1 = 0$, *trouver le lieu des points par lesquels passent des génératrices se coupant à angle droit.*

L'équation se réduit à

$$(x + 2y + z)(2x + 3y + z) - (x - y + z - 1) = 0 .$$

On aura une première famille de génératrices en posant

$$\left.\begin{aligned} 2x + 3y + z - \lambda(x - y + z - 1) &= 0 \\ x + 2y + z &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned}\right\} ;$$

les cosinus directeurs sont proportionnels à $1 + 3\lambda, -1, 1 - 3\lambda$.

Pour la seconde famille de génératrices, on aura

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + z - \mu(x - y + z - 1) &= 0 \\ 2x + 3y + z &= \frac{1}{\mu} \end{aligned}\right\} ,$$

les cosinus directeurs sont proportionnels à $-1 + 4\mu, 1 - \mu, -1 - 5\mu$.

Les génératrices λ, μ sont à angle droit si

$$1 + 3\lambda)(-1 + 4\mu) - (1 - \mu) + (1 - 3\lambda)(-1 - 5\mu) = 0 ,$$

ou

$$9\lambda\mu = 1 .$$

Sur la surface

$$\frac{1}{\lambda} = x + 2y + z , \qquad \mu = \frac{x + 2y + z}{x - y + z - 1} ,$$

et au point d'intersection des génératrices λ, μ

$$\lambda\mu = \frac{1}{x - y + z - 1} .$$

Le lieu est l'intersection de la surface avec le plan

$$x - y + z = 10 .$$