Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1926)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES POLYNOMES DE FONTANA-BESSEL

Autor: Appell, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-20681

SUR LES POLYNOMES DE FONTANA-BESSEL

PAR

M. Paul APPELL, Membre de l'Institut (Paris).

Les formules connues de la théorie des différences appliquées aux polynomes

$$Q_\nu(x) = \frac{x(1-x)\dots(\nu-1-x)}{1.2\dots\nu} = -\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1)}{1.2\dots\nu}, \quad (\alpha=-x)$$

$$Q_0(x) = -1, \qquad Q_\nu(x+1) - Q_\nu(x) = -Q_{\nu-1}(x) \tag{1}$$

donnent évidemment des formules relatives aux polynomes

$$P_{\nu+1}(x) = \int_0^x Q_\nu(x)\,dx\,; \qquad P_1(x) = -x \tag{2}$$

qui ont été considérés par Bessel pour $x = 1$ à propos d'une formule de Fontana (Voyez, pour une bibliographie détaillée, une Note de M. Giovanni Vacca, dans les *Atti della reale Accademia Nazionale dei Lincei*, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Serie Sesta, Vol. 1, Fasc. 3, Seduta del 28 febbraio 1925, p. 206 et suiv.). Nous appellerons ces polynomes $P_{\nu+1}(x)$ les polynomes de Fontana-Bessel. M. Ser a donné dans *L'Intermédiaire des Mathématiciens* (2me Série, t. IV, 1925, p. 126 et suiv.) des formules relatives à ces polynomes. Il écrit notamment la formule suivante, dans laquelle C désigne la constante d'Euler

$$\log\Gamma(x+1) + Cx = P_2(x) + \frac{P_3(x)}{2} + \frac{P_4(x)}{3} + \dots \tag{3}$$

qui donne la formule de Fontana pour $x = 1$; dans ce qui suit, nous désignerons par $p_2, p_3, \dots$ les nombres rationnels $P_2(1)$, $P_3(1), \dots$. En dérivant (3) par rapport à x on a

$$\Psi(x) + C = Q_1(x) + \frac{Q_2(x)}{2} + \frac{Q_3(x)}{3} + \dots \tag{4}$$

où $\Psi(x)$ désigne la fonction de Gauss. $\Psi(x)+C$ est, d'après Gauss (*Oeuvres*, t. III, p. 154 et suiv.) exprimable en termes finis quand x est commensurable; il en est de même de la série qui forme le second membre de (4). Par exemple les équations

$$\Psi\left(-\frac{1}{2}\right)+C=-2\log 2\,,\qquad \Psi\left(-\frac{1}{4}\right)+C=\frac{1}{2}\pi-3\log 2$$

donnent

$$-2\log 2=Q_1\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}Q_2\left(-\frac{1}{2}\right)+\ldots$$

$$-\frac{1}{2}\pi-3\log 2=Q_1\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2}Q_2\left(-\frac{1}{4}\right)+\ldots$$

Comme $\Psi(x+1)-\Psi(x)=\dfrac{1}{x+1}$, on a, d'après (1),

$$\frac{1}{1+x}=-\left[Q_0+\frac{Q_1(x)}{2}+\frac{Q_2(x)}{3}+\ldots\right];$$

de même

$$\frac{1}{2+x}-\frac{1}{1+x}=\left[\frac{Q_0(x)}{2}+\frac{Q_1(x)}{3}+\ldots\right];$$

. . . .

En intégrant ces relations, par rapport à x, de 0 à x, on a une série de formules dont la première a été donnée par M. Ser (*loc. cit.*); en les intégrant par rapport à x de 0 à 1 on voit apparaître les p.

La formule (1) intégrée par rapport à x, donne

$$P_{\nu+1}(x+1)-P_{\nu+1}(x)=-P_\nu(x)+p_{\nu+1}\,,$$

qui exprime $P_{\nu+1}(x+1)$ en

$$P_{\nu+1}(x)\qquad\text{et}\qquad P_\nu(x)\,.$$

La formule (4) se trouve déjà dans le *Calcul intégral* de J. Bertrand, p. 160; en l'ordonnant par rapport à x et identifiant avec

$$S_2x-S_3x^2+\ldots\,,$$

où

$$S_k=1+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{3^k}+\ldots\,,$$

on obtient des formules dignes d'attention.