d'ensembles de sphères dont les centres formeront des ensembles désignés par

$$e_1, e_2, \dots e_k, \dots$$

L'ensemble e_k contient tous les e_i d'indices $i < k$. L'ensemble e_∞ formé de tous les points des e_k est dénombrable et *partout dense.*

Soit maintenant la fonction $J_k(M)$ définie dans les sphères de E_k de la manière suivante: dans chaque sphère dont le volume est v, nous lui attribuons la valeur constante $\frac{v'}{v}$. Cette fonction est partout définie dans V, sauf sur un ensemble de mesure nulle où nous pouvons la prendre égale à J(M). L'intégrale de la fonction ainsi construite a évidemment pour valeur le volume V', quelque soit k. Donc, lorsque k croît indéfiniment, elle tend vers une limite égale à V'. Or, *en vertu de la continuité de* J(M), les fonctions $J_k(M)$ qui sont bornées d'après *d*) tendent vers J(M) dans tout V lorsque k croît indéfiniment. La formule (3) apparaît alors comme une conséquence immédiate de ce théorème classique de Lebesgue: *l'intégrale de la limite dans le champ des fonctions bornées est égale à la limite de l'intégrale.*

Notons que le raisonnement présenté sous cette forme ne peut se passer de l'hypothèse de la continuité de J(M) : l'ensemble sur lequel nous savons d'une manière immédiate (c'est-à-dire sans invoquer la continuité) que $J_k(M)$ tend vers J(M) se compose de l'ensemble dénombrable e_∞ et d'une suite dénombrable d'ensembles de mesure nulle omis à chaque application de ce lemme. La limite n'est donc assurée sans la continuité que sur un ensemble de mesure nulle. Mais, si l'on fait l'hypothèse de la continuité, entraînant l'uniforme continuité, on voit aisément que cette limite est partout assurée.

5. — *Conditions de validité de la formule* (3).

Le champ de validité de la formule (3) est en réalité beaucoup plus large que le champ défini par les hypothèses *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Cette formule subsiste en réalité dans les conditions les plus générales pour lesquelles le second membre a un sens, c'est-à-dire lorsque la fonction J (M) existe et est sommable. La démonstration conduit alors à considérer l'intégrale du second membre de (3) comme une fonction additive et absolument continue de l'ensemble V des points auxquels on l'étend. Dans ces conditions, la différence:

$$V' - \int_V J(M)\, d\omega_M$$

est aussi une fonction additive et absolument continue, dont la *dérivée sphérique centrée* est partout nulle. Le problème consiste à en déduire que cette fonction est nulle. Pour les éléments de la solution voir Lebesgue, Ann. Ec. Norm. 1910, et de La Vallée-Poussin, Intégrale de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire, chap. IV.

6. *Conséquences de la formule* (3).

Reprenons nos hypothèses simplificatrices de la continuité de J (M); on déduit qu'il y aura nécessairement dans tout volume V des points où J (M) sera égale à $\frac{V'}{V}$ (résultat signalé par Darboux, dans des conditions plus particulières, et comparable à la formule des accroissements finis, dans le champ des fonctions monotones à dérivée continue). De ce fait, il résulte que la limite du rapport de deux volumes correspondants est J (M) lorsque le premier de ces volumes est infiniment voisin de M (sans plus).

Il n'y a alors aucune difficulté à déduire de ces résultats le théorème général de variance d'une intégrale multiple:

$$\int_{V'} g(P)\, d\omega_P = \int_V g(\mathcal{T}(M))\, J(M)\, d\omega_M \qquad (4)$$

théorème qui d'ailleurs a une signification physique intuitive et exprime la conservation de la masse par élément; lorsqu'on désigne par f (M) la densité de la matière qui existe au point M du volume V, par g (P) la densité qui règnera après la déformation, au point P correspondant de V', on aura nécessairement:

$$f(M)\, d\omega_M = g(P)\, d\omega_P$$