

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 27 (1928)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ROTATIONNEL ET FORMULE DE STOKES
Autor: Bouligand, Georges / Roussel, André
Kapitel: 8. Application.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-21866>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

La masse du fluide qui occupe Ω à l'instant t a pour volume une certaine fonction du temps. Le théorème de variation du volume exprimé par la formule (3) nous apprend que cette fonction du temps a pour dérivée :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{V} d\omega .$$

D'autre part, on a également :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\nu} d\sigma$$

$\vec{\nu}$ désignant le vecteur unité de la normale extérieure en un point de Σ . D'où le théorème flux divergence

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} d\omega = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{\nu} d\sigma . \quad (5)$$

En réalité, en conservant les mêmes hypothèses sur Σ , on pourrait montrer (à la base des résultats signalés sans démonstration au n° 5) que cette formule est valable dans des conditions beaucoup plus générales : il suffit de supposer l'existence et la sommabilité de $\operatorname{div} \vec{V}$.

8. Application.

Il est clair que tout ce que nous venons de dire dans le cas de l'espace à 3 dimensions s'applique, avec des modifications évidentes au cas où les vecteurs considérés appartiennent tous au même plan. Le jacobien sphérique centré par exemple, sera remplacé par un jacobien circulaire centré, et nous aurons la relation :

$$\int_S \operatorname{div} \vec{V} \cdot d\sigma = \int_C \vec{V} \cdot \vec{\nu} ds \quad (6)$$

C étant une courbe fermée à tangente continue sans point double, $\vec{\nu}$ la normale extérieure, $d\sigma$ l'élément d'aire.

Soit alors $P(x, y)$, $Q(x, y)$ deux fonctions données, \vec{V} le vecteur de composantes Q et $-P$; il est clair que l'on a :

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C \vec{V} \cdot \vec{\nu} ds .$$

Par suite, pour tout contour fermé à tangente continue sans point double C parcouru dans le sens direct :

$$\int_C P dx + Q dy = \int_S \operatorname{div} \vec{V} \cdot d\sigma \quad (7)$$

on en tire le théorème suivant, généralisation du théorème classique sur l'intégrale des différentielles exactes :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une intégrale curviligne

$$\int_C P dx + Q dy$$

soit nulle le long de tout contour fermé sans point double est que la divergence circulaire centrée du vecteur : $\vec{x}Q - \vec{y}P$ soit identiquement nulle dans la région du plan envisagée¹.

D'après (7) cette condition est suffisante; elle est aussi nécessaire puisque le long de tout cercle de centre M l'intégrale

$$\int_C (\vec{x}Q - \vec{y}P) \cdot \vec{v} ds$$

étant nulle par hypothèse, il en sera de même de son quotient par $\pi\rho^2$ quel que soit ρ ; d'où existence en chaque point d'une divergence circulaire centrée nulle.

[9. Définition du rotationnel.

Pour définir le rotationnel, nous poserons :

$$\operatorname{div} (\vec{V} \wedge \vec{u}) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{V} \quad (8)$$

où \vec{u} désigne un vecteur unitaire de direction quelconque, mais fixe². On voit immédiatement que si les composantes de \vec{V} ont des dérivées du premier ordre par rapport à x, y, z , le rotationnel ainsi défini coïncide bien avec le rotationnel classique. Dans le

¹ L'énoncé suppose la continuité de la tangente. On pourrait d'ailleurs aisément, à la faveur d'un théorème de M. Lebesgue, étendre le résultat aux courbes rectifiables.

² Pareillement, on pourrait unifier la définition du gradient et de la divergence et aboutir à la notion de gradient sphérique centré en utilisant l'identité

$$\overrightarrow{\operatorname{grad}} \varphi \cdot \vec{u} = \operatorname{div} (\varphi \vec{u}).$$