ou si l'on a identiquement

$$\Sigma \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial u_i} \equiv k \cdot f(x, u)$$

le moment de chaque élément et de son conjugué au connexe $f(xu) = 0$ est nul. Dans ce cas le connexe conjugué du (1) est le connexe identique [1].

§ 7. — *Moment de deux droites dans la théorie des connexes aux éléments (point, droite) dans le* R_3.

1. — Considérons un connexe lineo-linaire défini par l'équation

$$\Sigma a_{i,\, kj} x_i p_{kj} = 0 \qquad (1)$$

que l'on peut écrire aussi

$$\Phi(\overset{1}{x}\, ; \overset{1}{p}) \equiv \Sigma \Phi_j x_i \equiv \Sigma \Phi^{(1)}_{kj} p_{kj}$$

ou symboliquement

$$a_x (\alpha\alpha pp) \equiv a_x \alpha_p^2$$

De l'ensemble des ∞^7 éléments (point, droite) de l'espace, l'équation (1) détache ∞^6 éléments, que l'on peut caractériser de cette manière: à chaque point X correspondent (c'est-à-dire forment avec X l'élément de la configuration) ∞^3 droites du complexe linéaire

$$P(x) \equiv \Sigma \Phi^{(1)}_{kj} p_{kj} = 0 \; ; \qquad (2)$$

parmi ces complexes il y a ∞^2 complexes spéciaux, qui correspondent aux points d'une surface du 2^{me} ordre

$$\Phi^{(1)}_{12}\Phi^{(1)}_{34} + \Phi^{(1)}_{13}\Phi^{(1)}_{42} + \Phi^{(1)}_{14}\Phi^{(1)}_{23} = 0 \equiv a_x a'_x (\alpha b\, \alpha' b') \,. \qquad (3)$$

A chaque point de cette surface correspond une droite, avec

---

[1] Ceci donne l'idée de considérer les connexes qui sont des transformations rationnelles du connexe identique: si nous avons un connexe quaternaire

$$\Sigma_k \varphi_k(x, u) \psi_k(x, u) = 0 \qquad (k = 1 \ldots 4)$$

où φ_k — du degré k en x et du h en u, et ψ_k — du degré $m - k$ en x, $n - h$ en u, à l'aide de la transformation $\varrho u_k = \varphi_k(x, u)$, $\sigma v_k = \psi_k(x, u)$, nous le transformons en $v_y = 0$.

les coordonnées $\Phi_{kj}^{(1)}$, l'axe du complexe linéaire spécial (2). Donc chaque complexe P_x sera spécial si l'équation (3) s'annule identiquement, ce qui a lieu quand les coefficients $a_{i,kj}$ remplissent 10 relations

$$a_{i,12}a_{k,34} + a_{i,34}a_{k,12} + a_{i,13}a_{k,42} + a_{i,42}a_{k,13}$$
$$+ a_{i,14}a_{k,23} + a_{i,23}a_{k,14} = 0 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

ce qui s'écrit symboliquement

$$(a_k a_i' + a_k' a_i)(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}') = 0\ .$$

La surface (3) peut présenter les divers cas de dégénérescence sur lesquels nous n'insistons pas davantage pour le moment.

2. — Avec le point x forment l'élément de la configuration toutes les droites de l'espace, dont les coordonnées x_i remplissent les conditions

$$\Phi_{kj}^{(1)} = 0 \qquad (k,\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

au nombre de 6. En éliminant $x_1 \ldots x_4$ on voit que doivent être nuls les déterminants du tableau

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,12} & a_{1,13} & a_{1,14} & a_{1,23} & a_{1,24} & a_{1,34} \\ a_{2,12} & a_{2,13} & a_{2,14} & a_{2,23} & a_{2,24} & a_{2,34} \\ a_{3,12} & a_{3,13} & a_{3,14} & a_{3,23} & a_{3,24} & a_{3,34} \\ a_{4,12} & a_{4,13} & a_{4,14} & a_{4,23} & a_{4,24} & a_{4,34} \end{matrix}\right\| = 0 \qquad (4)$$

ce qui donne en somme 15 relations, dont 3 seulement indépendantes. Si les conditions sont toutes remplies, les mineurs du 3me ordre n'étant pas tous nuls, on reçoit un système défini des valeurs $x_1 x_2 x_3 x_4$, qui déterminent un *point fondamental* du connexe linéo-linéaire (1): par exemple, pour le connexe

$$x_2 p_{12} + x_3 p_{13} + x_4 p_{14} = 0 \qquad (a)$$

le tableau (4) prend la forme

$$\left\|\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}\right\|$$

Tous les mineurs s'annulent identiquement, et parmi les déterminants du 3^{me} ordre il y en a un qui n'est pas zéro:

$$\begin{vmatrix} a_{2,12} & a_{2,13} & a_{2,14} \\ a_{3,12} & a_{3,13} & a_{3,14} \\ a_{4,12} & a_{4,13} & a_{4,14} \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 .$$

Le point $x_2 = 0 = x_3 = x_4$ est *le point fondamental*, ce que l'on voit d'ailleurs directement de (a).

3. — Prenons à présent quelque droite déterminée. Dans le connexe (1) lui correspond le plan

$$\Sigma \Phi_i^{(1)} x_i = 0 \tag{5}$$

en général bien déterminé, — seuls les points de ce plan forment des éléments du connexe (1) avec la droite choisie.

Mais il existe des droites qui forment l'élément du (1) avec chaque point de l'espace, qu'on peut appeler les *droites fondamentales;* elles sont définies par des équations

$$\Phi_i^{(1)} = 0 , \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{6}$$

ce sont donc des droites communes à quatre complexes linéaires (6), elles sont donc au nombre de *deux*. En effet si le déterminant Δ est différent de zéro

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{1,14} & a_{1,24} & a_{1,34} & a_{1,23} \\ a_{2,14} & a_{2,24} & a_{2.34} & a_{2,23} \\ a_{3,14} & a_{3,24} & a_{3,34} & a_{3,23} \\ a_{4,14} & a_{4,24} & a_{4.34} & a_{4,23} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7}$$

on peut résoudre (6) par rapport à $p_{14}, p_{24}, p_{34}, p_{23}$ (ou pour quelques autres quatre p_{kj} dont le déterminant correspondant de la matrice (4) est différent de zéro), et on peut écrire

$$\Delta p_{ik} = b_{ik} p_{12} + c_{ik} p_{13} , \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4) \tag{8}$$

$$b_{12} = c_{13} = \Delta , \qquad b_{13} = c_{12} = 0 .$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$p_{12}\,p_{34} + p_{13}\,p_{42} + p_{14}\,p_{23} = 0 \,,$$

on a l'équation du 2me degré

$$\mathrm{A}p_{12}^2 + \mathrm{B}p_{12}\,p_{13} + \mathrm{C}p_{13}^2 = 0 \tag{9}$$

où l'on a

$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{A} &= \Delta\,.\,b_{34} + b_{14}\,b_{23} \,, \\ \mathrm{B} &= \Delta\,.\,b_{34} + \Delta\,b_{32} + b_{14}\,c_{23} + b_{23}\,c_{14} \,, \\ \mathrm{C} &= \Delta\,.\,c_{42} + c_{14}\,c_{23} \,. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Les droites fondamentales sont donc réelles et distinctes si

$$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} > 0 \,,$$

imaginaires, si

$$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} < 0 \,,$$

elles coïncident, si

$$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0 \,. \tag{11}$$

Dans le premier cas on pourrait supposer, qu'il peut arriver que les deux droites fondamentales se rencontrent. Mais il n'est pas difficile de montrer, que *si les droites fondamentales ont un point commun, elles ont tous leurs points en commun, c'est-à-dire elles coïncident*, la condition d'intersection étant aussi (11):

$$\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 0 \,.$$

On peut le démontrer par le calcul de la manière suivante. Soient $\bar{p}$ et $\bar{p}'$ deux droites fondamentales de (1). Alors les rapports des coordonnées $\dfrac{\bar{p}_{12}}{\bar{p}_{13}}$ et $\dfrac{\bar{p}'_{12}}{\bar{p}'_{13}}$ doivent vérifier l'équation (9). Donc

$$\frac{\bar{p}_{12}}{\bar{p}_{13}} + \frac{\bar{p}'_{12}}{\bar{p}'_{13}} = -\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}\,, \qquad \frac{\bar{p}_{12}\cdot\bar{p}'_{12}}{\bar{p}_{13}\cdot\bar{p}'_{13}} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$$

ou bien

$$\frac{\bar{p}_{12}\cdot\bar{p}'_{12}}{\mathrm{C}} = \frac{\bar{p}_{12}\cdot\bar{p}'_{13} + \bar{p}_{13}\cdot\bar{p}'_{12}}{-\mathrm{B}} = \frac{\bar{p}_{13}\cdot\bar{p}'_{13}}{\mathrm{A}} = k \,. \qquad (k \neq 0)$$

Mais

$$\Delta\,.\,\bar{p}_{14} = b_{14}\,\bar{p}_{12} + c_{14}\,\bar{p}_{13}$$

$$\Delta\,.\,\bar{p}'_{14} = b_{14}\,\bar{p}'_{12} + c_{14}\,\bar{p}'_{13}$$

d'après (8).

Substituons ces valeurs en

$$\Delta^2(\bar{p}, \bar{p}') .$$

Nous aurons après quelques calculs

$$\Delta^2(\bar{p}, \bar{p}') = k(4AC - B^2) \qquad (12)$$

ce qui prouve le théorème énoncé et montre en même temps la relation qui existe entre l'expression $4AC - B^2$ et le moment de deux droites fondamentales du connexe (1).

Ainsi à chaque connexe linéo-linéaire (1) appartient une certaine caractéristique, indépendante du choix des coordonnées, qui détermine la position réciproque des deux droites fondamentales du connexe, c'est *le moment des deux droites fondamentales.*

SUR LA CONVERGENCE DES SUITES DE FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES

PAR

Georges VALIRON (Strasbourg).

Je me propose d'étendre dans cette note les théorèmes relatifs aux fonctions holomorphes bornées dans leur ensemble dans un domaine aux fonctions quasi-analytiques satisfaisant à certaines conditions.

1. — La famille des fonctions $f(x)$, dérivables et de dérivée uniformément bornée sur un segment $a \leqq x \leqq b$, ($|f'(x)| < M$ quelle que soit la fonction et quel que soit x sur (a,b)), est une famille de fonctions également continues. Il s'ensuit que, *si une suite de fonctions $f(x; n)$ de la famille converge sur un ensemble* E *de points denses sur le segment* (a,b), *cette suite converge uniformé-*