permettre de retomber sur les opérateurs de la Théorie des groupes ou sur ceux de la dérivation covariante. Et c'est vraiment une grande et admirable chose que de voir l'analyse hermitienne, jugée généralement si abstraite et pour laquelle l'illustre auteur n'a jamais recherché d'applications physiques qui ne pouvaient d'ailleurs exister il y a quarante ou cinquante ans, s'adapter maintenant et même dominer les conceptions d'aujourd'hui sur la constitution de la lumière et de la matière.

Le Chapitre IV est consacré à des problèmes spéciaux de mécanique ondulatoire, tentant notamment de rechercher ce que l'on peut transporter de celle-ci du domaine de l'atome dans le domaine de la molécule. Relevons un long et intéressant paragraphe sur la théorie relativistique de l'atome dont le type est l'atome d'hydrogène. Sommerfeld, Bohr, Dirac, Pauli, ... sont plus que jamais mis à contribution. Je ne sais si les chimistes de valeur moyenne suivront jusque là mais n'oublions pas qu'ils auront toujours le premier chapitre du livre comme résumé des plus accessibles et des plus adroits. Il faut croire aussi qu'un tel ouvrage sera grandement apprécié des mathématiciens; il pourrait préparer à celui de Weyl, précédemment analysé, et probablement aussi à celui de Wintner que nous allons examiner maintenant. Enfin ne terminons pas sans signaler que M. J. Frenkel est professeur à l'Institut polytechnique de Leningrad. Si son œuvre, imprimée en Allemagne, a pu cependant être conçue dans la capitale soviétique, ceci prouve que la Russie tend à reprendre son rang parmi les grandes nations honorant la Science.

A. Buhl (Toulouse).

Aurel Wintner. — **Spektraltheorie der unendlichen Matrizen.** Einführung in den analytischen Apparat der Quantenmechanik. Mit einer Einleitung von Leon Lichtenstein. — Un volume in-8° de xii-280 pages. Prix: Broché, Rm. 21; relié, Rm. 22,50. S. Hirzel, Leipzig, 1929.

Cette œuvre, enfantée par un excellent esprit mathématique, paraît surtout s'adresser aux mathématiciens. Ce n'est point l'arche d'alliance de Weyl ni la perche adroitement tendue, aux confrères du camp expérimental, par Frenkel; c'est la théorie logique, le squelette symbolique qui ne risque pas de s'endommager ni de connaître les vicissitudes qu'un revêtement physique n'évitera certainement pas. La première ligne de la première page contient déjà une inégalité et une parenthèse à deux indices; toutes les lignes, toutes les pages suivantes sont à l'avenant. Et cependant c'est clair, très clair et, c'est le cas de le dire, d'un style hermitien. On comprend tout de suite que la matrice ici définie est une sorte de nombre complexe à n^2 éléments, s'écrivant en tableau carré; la définition de l'égalité de deux matrices fait immédiatement accepter cette idée, car cette égalité n'a lieu que lorsque les éléments, de même situation dans les deux matrices, sont individuellement égaux. Puis arrive le fait fondamental: les matrices sont suscepticles d'addition ordinaire mais leur multiplication, en général, n'est pas commutative. Dès lors elles sont fatalement des instruments constructifs ordonnant, de haut, toutes les non commutativités, celles du Calcul tensoriel, celles de la Théorie des groupes et tant d'autres. Il me semble qu'il n'y a pas besoin d'en dire plus pour exciter, au plus haut point, un intérêt qu'une étude attentive ne laissera jamais faiblir. Et combien l'on devrait être attentif, en France surtout, à de telles publications. Certes M. Wintner s'est naturellement documenté chez ses compatriotes. Il cite et utilise Frobenius, Hurwitz, Minkowski, Hilbert, Schmidt, Hellinger, ...; mais, presque partout, dans ce livre, nous trouvons Hermite. Qui connaît bien, chez nous, l'analyse des matrices hermitiennes ? Qui sait quelles jolies choses elles donnèrent à Stieltjes, Français d'adoption et précurseur de Lebesgue. C'est grâce à M. Aurel Wintner que nous allons mieux connaître nos richesses ignorées et enfouies jusque dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, car je ne veux pas perdre cette nouvelle occasion de rappeler que Stieltjes, le grand Stieltjes fut un de mes prédécesseurs dans la chaire d'Analyse mathématique de l'Université toulousaine.

Revenons au volume. Il me semble impossible d'analyser, rien qu'avec des mots, les six grands chapitres qu'il contient. Mais on peut faire une sorte de catalogue des nombreux et vastes sujets qu'il englobe. D'abord observons que le titre seul indique qu'il s'agit surtout du cas de n infini; entre la matrice finie et la matrice infinie, il y a une différence plus grande encore que celle qui existe entre le polynome et la fonction analytique quelconque.

Aux matrices, on attache aisément des déterminants et, à ceux-ci, des équations *séculaires* (terme emprunté à la Mécanique céleste); c'est l'ensemble des racines d'une équation séculaire qui forme un *spectre* (terme emprunté à la Physique). Ceci rappelle, reprise sur des bases beaucoup plus larges, la Théorie des Groupes fondée sur l'équation caractéristique. Les matrices sont d'ailleurs susceptibles de transformations qui se notent comme celles obtenues à l'aide de groupes; elles ont des formes canoniques en relation avec des équations intégrales dont les plus simples ont le type de Fourier. Elles peuvent aussi conduire aux développements en fraction continue. Les formules intégrales d'inversion données par Stieltjes permettent d'atteindre des résultats plus généraux dus à Hilbert. Ceci ne va pas sans de profonds aperçus relevant de la Théorie des fonctions et des séries asymptotiques de Poincaré. Toutes les formules intégrales, tous les critères intégraux peuvent être conçus au sens général de Stieltjes et de Lebesgue.

L'ensemble de la trame précédente est généralisable dans le cas où n devient infini, sous réserve qu'il reste à discuter de nombreuses questions de convergence. Hilbert, Hilb, Tœplitz, ..., ont prolongé des méthodes déjà étudiées par Poincaré à propos de la Théorie de la Lune de Hill. Après les généralités, il faut étudier les matrices particulières, à éléments liés par quelque loi fonctionnelle, encore, le plus souvent, de nature intégrale. Le Calcul fonctionnel fait vraiment merveille dans la structure et les arrangements matriciels. Quant au point de vue physique, aisé à retrouver dans ce livre où l'auteur le passe souvent sous silence, il me semble qu'on peut le caractériser en remarquant que la Gravifique d'Einstein, ayant pour instrument analytique le Calcul différentiel absolu, ne fait appel, de ce fait, qu'à un calcul qui tient de très près à la Théorie des déterminants. Mais, si l'on veut aller plus avant, traiter notamment des ondes et des quanta, les déterminants ne suffisent plus et il faut les matrices. Que M. Wintner soit un bon mathématicien, voilà, à coup sûr, une affirmation bien superflue, mais, étant donnée la manière dont il traite des matrices, je ne suis pas éloigné de le ranger parmi les savants auxquels la Physique devra beaucoup.

A. BUHL (Toulouse).