

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1929)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES SURFACES DE NIVEAU DU POTENTIEL  
**Autor:** Brunner, William  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22593>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$U(x)$  étant croissante. On en déduit sans peine que, à partir d'une valeur  $r$ , on a aussi

$$U(x) < x^{\rho+\varepsilon}$$

et

$$\log M(R) < \log M(r) + R^{\rho+\varepsilon} \log \frac{R}{r},$$

donc

$$\log M^1(r) < \log M(r) + R^{\rho+\varepsilon} \log \frac{R}{r} + \log \frac{1}{R-r}.$$

En prenant

$$R = r + r^{1-\rho-\varepsilon},$$

on obtient

$$\log M^1(r) < \log M(r) + \log r^{\rho-1+\varepsilon} + K,$$

$K$  étant fini. Par suite, si petit que soit  $\varepsilon$ , on a, à partir d'une valeur de  $r$

$$M^1(r) < r^{\rho-1+\varepsilon} M(r).$$

C'est l'inégalité que je voulais établir.

## SUR LES SURFACES DE NIVEAU DU POTENTIEL

PAR

William BRUNNER (Zurich).

Soit  $S_1$  une surface fermée entourant le point  $O$  et  $S_2$  une autre surface fermée entourant  $S_1$ . Supposons que  $S_1$  et  $S_2$  soient des surfaces de niveau de la fonction harmonique  $U(x, y, z)$ , régulière dans la partie de l'espace comprise entre  $S_1$  et  $S_2$ . Si  $S_1$  et  $S_2$  jouissent de la propriété qu'une demi-droite quelconque issue du point  $O$  ne les coupe qu'une fois, toutes les surfaces de niveau de  $U$  comprises entre  $S_1$  et  $S_2$  jouissent de la même propriété<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Les surfaces jouissant de ladite propriété s'appellent « sternförmig » en allemand. Le théorème analogue pour le cas du plan (potentiel logarithmique) est bien connu, voir par ex. G. PÓLYA et G. SZEGÖ, *Aufgaben und Lehrrsätze I* (1925), p. 145. Le théorème énoncé m'a été indiqué sans démonstration par M. G. Pólya, à l'occasion de mon travail de diplôme, ensemble avec un autre analogue, relatif aux surfaces de niveau convexes.

Les surfaces  $S_1$ ,  $S_2$  étant des surfaces de niveau de  $U$ , leurs équations sont de la forme

$$U(x, y, z) = c_1, \quad U(x, y, z) = c_2,$$

où  $c_1, c_2$  sont des constantes; nous supposons  $c_1 < c_2$ . La normale extérieure à ces surfaces de niveau est un vecteur dont les composantes sont proportionnelles à

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Supposons que le point  $O$  est situé à l'origine. Alors le cosinus de l'angle formé par la normale extérieure au point  $x, y, z$  et par une demi-droite issue de  $O$  et passant par ce point, est du même signe que l'expression

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + z \frac{\partial U}{\partial z} = V.$$

Par hypothèse, l'angle en question est *aigu* en chaque point de  $S_1$  et de  $S_2$ , donc la fonction  $V$  est *positive* sur ces surfaces. Mais la fonction  $V$  est harmonique, puisque

$$\Delta V = 2\Delta U + x \frac{\partial \Delta U}{\partial x} + y \frac{\partial \Delta U}{\partial y} + z \frac{\partial \Delta U}{\partial z} = 0.$$

La fonction harmonique  $V$  étant positive sur  $S_1$  et  $S_2$ , reste positive dans la partie de l'espace comprise entre ces deux surfaces. C.q.f.d.

---