SUR UN POINT REMARQUABLE DU TRIANGLE [1]

PAR

Gustav Franke (Berlin).

I. — Quand les côtés d'un triangle sont divisés de telle manière que les segments déterminés par les points de division satisfont à la relation

$$x \cdot y \cdot z = u \cdot v \cdot w \ ,$$

les transversales joignant les sommets aux points de division se coupent, comme on sait, en un même point. S'il existe par contre entre les six segments la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2 \ ,$$

les segments d'un même membre étant non consécutifs, les perpendiculaires élevées sur les côtés en ces points de division se coupent en un même point.

Les deux relations ne sont généralement pas satisfaites simultanément. Elles le sont pour certains groupes spéciaux de (trois) points; par exemple, pour les points milieu des côtés, les points de contact du cercle inscrit, ceux des cercles ex-inscrits, les pieds des hauteurs.

Dans ce travail, nous entendrons par point P un point satisfaisant à la condition suivante: Si l'on abaisse du point P les perpendiculaires sur les côtés d'un triangle et qu'on joigne leurs pieds aux sommets correspondants, les trois transversales ainsi obtenues doivent se couper en un même point.

On reconnaît d'emblée que certains points remarquables du

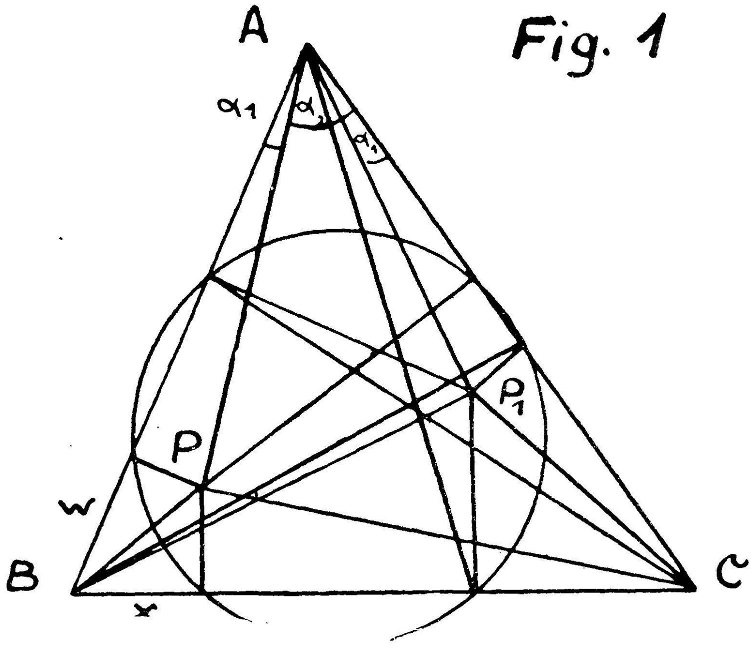
[1] Traduit de l'allemand par Arnold Streit, Dr phil., Berne.

triangle satisfont à cette condition: le centre du cercle circonscrit, les centres des cercles inscrit et ex-inscrits, le point d'intersection des hauteurs.

Si P est un point de la sorte fixée, on peut, en partant de P, construire une série de points de la même sorte.

Le point, par exemple, dont la distance à P est divisée en deux parties égales par le centre du cercle circonscrit, satisfait à la condition exigée. Un tel point qui est le symétrique de P par rapport au centre du cercle circonscrit sera appelé, pour abréger, le *point opposé* à P. Il est le point d'intersection des perpendiculaires élevées aux points qui, par rapport aux perpendiculaires aux milieux des côtés, sont les symétriques des pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les côtés. Deux points symétriques ainsi situés sur un même côté seront appelés des *points opposés latéraux.*

Si l'on mène les transversales joignant le point P aux sommets et si l'on construit leurs symétriques par rapport aux bissectrices des angles du triangle *(transversales opposées)*, ces trois transversales se coupent également en un même point P_1 remplissant la condition exigée.



Soient en effet α_1 et α_2, β_1 et β_2, γ_1 et γ_2 les angles formés avec les côtés par les transversales joignant les sommets au point P (fig. 1). Si l'on tient compte des relations $\cos \alpha_1 = \frac{z}{AP}$ etc., la relation

$$x \cdot y \cdot z = u \cdot v \cdot w \ ,$$

satisfaite pour le point P, devient:

$$\cos \alpha_1 \cdot \cos \beta_1 \cdot \cos \gamma_1 = \cos \alpha_2 \cdot \cos \beta_2 \cdot \cos \gamma_2 \qquad (1)$$

Simultanément, on a, pour le même point P:

$$\sin \alpha_1 \cdot \sin \beta_1 \cdot \sin \gamma_1 = \sin \alpha_2 \cdot \sin \beta_2 \cdot \sin \gamma_2 \ , \qquad (2)$$

condition pour laquelle trois transversales issues des sommets se coupent en un même point.

On constate d'emblée que les deux conditions (1) et (2) sont aussi remplies pour les transversales symétriques dont il est question. Elles se coupent donc en un même point P_1 (relation 2) tel, que si l'on abaisse de P_1 les perpendiculaires sur les côtés, les transversales joignant leurs pieds aux sommets se coupent en un même point (relation 1).

Les pieds des perpendiculaires abaissées de P et P_1 sur les côtés sont sur une circonférence dont le centre est le point milieu de la distance PP_1. (On sait qu'il en est de même quand on effectue la construction indiquée en partant d'un point quelconque du plan (voir les œuvres de Jacob STEINER, 1er volume, p. 192-193.)

Ce résultat peut s'exprimer sous la forme suivante:

Si l'on mène une circonférence par les pieds des perpendiculaires abaissées du point P *sur les côtés, les seconds points d'intersection de cette circonférence avec les côtés sont tels, que les perpendiculaires élevées en ces points d'une part et leurs droites de jonction avec les sommets d'autre part se coupent respectivement en un même point.*

En multipliant (1) et (2) membre à membre, on trouve

$$\sin (2\alpha_1) \cdot \sin (2\beta_1) \cdot \sin (2\gamma_1) = \sin (2\alpha_2) \cdot \sin (2\beta_2) \cdot \sin (2\gamma_2) \qquad (3)$$

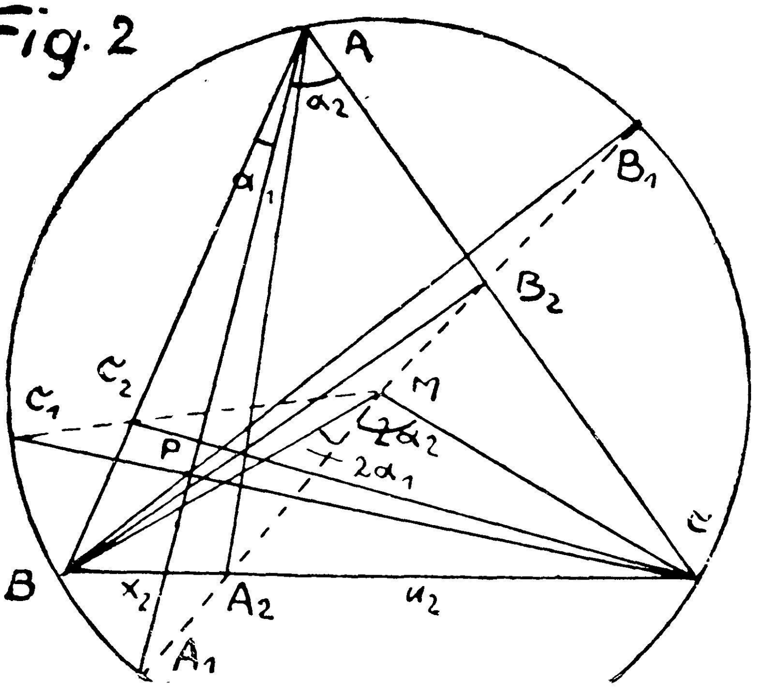
Cette relation permet de découvrir un nouveau point remarquable:

Soient A_1, B_1 et C_1 les points d'intersection des prolongements de AP, BP et CP avec le cercle circonscrit au triangle ABC (fig. 2). Les rayons aboutissant à ces points coupent les côtés en trois points A_2, B_2 et C_2 tels que leurs droites de jonction aux sommets opposés se coupent en un même point.

Car, en posant $BA_2 = x_2$, $CA_2 = u_2$, etc., on obtient pour les angles au centre $2\alpha_1$; $2\alpha_2$, etc.:

$$\frac{\sin 2\alpha_1}{\sin 2\alpha_2} = \frac{x_2}{u_2}\,, \quad \frac{\sin 2\beta_1}{\sin 2\beta_2} = \frac{y_2}{v_2}\,, \quad \frac{\sin 2\gamma_1}{\sin 2\gamma_2} = \frac{z_2}{w_2}\,,$$

Fig. 2



d'où résulte la relation

$$x_2 \cdot y_2 \cdot z_2 = u_2 \cdot v_2 \cdot w_2 \,.$$

II. — Cherchons le lieu géométrique des points P. Choisissons le triangle considéré comme triangle de coordonnées; les per-

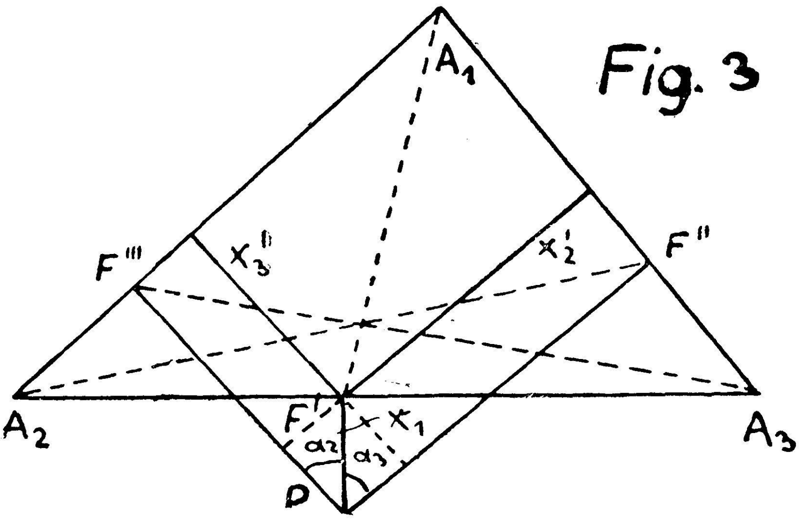


Fig. 3

pendiculaires x_1, x_2, x_3 abaissées du point P sur les côtés seront les coordonnées de ce point. Les coordonnées des pieds F', F'', F''' de ces perpendiculaires sont fournies d'emblée par la figure (3):

$$x_1' = 0\ , \qquad x_2' = x_2 + x_1 . \cos \alpha_3\ , \qquad x_3' = x_3 + x_1 . \cos \alpha_2 \qquad (F')$$

$$x_2'' = 0\ , \qquad x_3'' = x_3 + x_2 . \cos \alpha_1\ , \qquad x_1'' = x_1 + x_2 . \cos \alpha_3 \qquad (F'')$$

$$x_3''' = 0\ , \qquad x_1''' = x_1 + x_3 . \cos \alpha_2\ , \qquad x_2''' = x_2 + x_3 . \cos \alpha_1 . \qquad (F''')$$

Les transversales joignant les sommets aux points F', F'', F''' devant passer par un même point, le lieu des points P est défini par la condition suivante (qui n'est autre que la relation 2), d'où résulte que ce lieu est une courbe du troisième ordre:

$$(x_2 + x_1 . \cos \alpha_3) . (x_3 + x_2 . \cos \alpha_1) . (x_1 + x_3 . \cos \alpha_2)$$
$$= (x_3 + x_1 . \cos \alpha_2) . (x_1 + x_2 . \cos \alpha_3) . (x_2 + x_3 . \cos \alpha_1)$$

ou

$$k_1 . x_1 . (x_2^2 - x_3^2) + k_2 . x_2 . (x_3^2 - x_1^2) + k_3 . x_3 . (x_1^2 - x_2^2) = 0\ ,$$

où

$$k_1 = \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3\ , \qquad k_2 = \cos \alpha_2 - \cos \alpha_3 \cos \alpha_1\ ,$$
$$k_3 = \cos \alpha_3 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2\ .$$

La signification géométrique des coefficients k_i de l'équation de la courbe est facile à déterminer. Si l'on désigne le rayon du

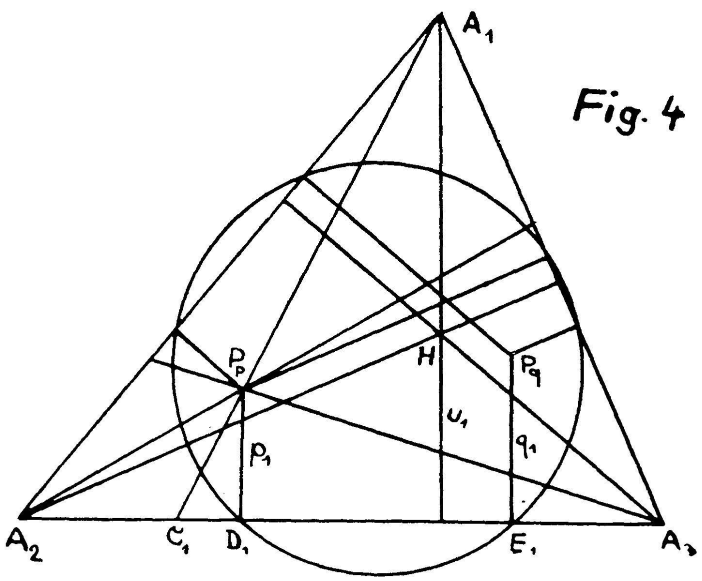


Fig. 4

cercle circonscrit par r, les perpendiculaires élevées au milieu des côtés par $m_i\,(i = 1, 2, 3)$, les segments supérieurs des hauteurs par o_i, les segments inférieurs par u_i, on a (fig. 4)

$$2m_i = 2r \cdot \cos\alpha_i = o_i$$

$$u_i = o_k \cdot \cos\alpha_l \qquad (k, l = 1, 2, 3)$$

$$= 2r \cdot \cos\alpha_k \cdot \cos\alpha_l$$

$$o_i - u_i = 2r \cdot (\cos\alpha_i - \cos\alpha_k \cdot \cos\alpha_l) = 2r \cdot k_i ,$$

c'est-à-dire:

Les coefficients de l'équation de la courbe sont égaux ou proportionnels aux différences entre les segments supérieurs et inférieurs des hauteurs.

Les perpendiculaires p_i élevées aux points opposés latéraux des pieds des hauteurs se coupent au point opposé au point d'intersection des hauteurs et peuvent par conséquent être appelées les *perpendiculaires opposées* aux hauteurs. Leurs longueurs s'obtiennent facilement, chacune d'elles étant l'une des bases d'un trapèze dont la seconde base est u_i et la médiane m_i:

$$p_i = 2m_i - u_i = o_i - u_i .$$

Les coefficients de l'équation de la courbe sont donc respectivement égaux ou proportionnels aux perpendiculaires opposées aux hauteurs.

III. — Les points intéressants de la courbe sont en premier lieu ses points d'intersection avec les côtés. Les points d'intersection avec le côté $x_1 = 0$ se déterminent au moyen de la relation

$$x_2 \cdot x_3 \cdot (k_2 x_3 - k_3 x_2) = 0 .$$

$x_2 = 0$; la courbe passe par le sommet A_3 . (1)

$x_3 = 0$; la courbe passe par le sommet A_2 . (2)

$$k_2 x_3 - k_3 x_2 = 0 . \qquad (3)$$

Pour le point d'intersection C_1 déterminé par l'égalité (3), il existe donc la relation

$$\frac{x_3}{x_2} = \frac{k_3}{k_2} = \frac{p_3}{p_2} ,$$

c'est-à-dire: en dehors du fait que la courbe passe par les sommets du triangle, elle coupe les côtés en leurs points d'intersection avec les transversales joignant les sommets au point opposé au point d'intersection des hauteurs.

Les perpendiculaires élevées en ces points d'intersection de la courbe avec les côtés se coupent en un même point (qui est aussi un point de la courbe).

Pour le démontrer d'une façon élémentaire, il suffit de considérer les segments déterminés sur les côtés. Si on les désigne, comme sous le n° I, de nouveau par x et u, y et v, z et w, de telle manière que

$$x + u = A_2 A_3 = a_1 \ , \quad y + v = A_3 A_1 = a_2 \ , \quad z + w = A_1 A_2 = a_3 \ ,$$

on a

$$\frac{x}{u} = \frac{x}{a_1 - x} = \frac{p_3}{\sin \alpha_2} : \frac{p_2}{\sin \alpha_3} = \frac{p_3}{p_2} \cdot \frac{a_3}{a_2} \ ,$$

$$x \cdot p_2 \cdot a_2 = (a_1 - x) \cdot p_3 \cdot a_3 \ ,$$

$$x \cdot (p_2 a_2 + p_3 a_3) = a_1 \cdot p_3 \cdot a_3 = x \cdot (a_1 h_1 - a_1 p_1) \ ,$$

et comme

$$h_1 - p_1 = o_1 + u_1 - (o_1 - u_1) = 2u_1 \ ,$$

$$x = \frac{a_3 p_3}{2u_1} \ .$$

On trouve de même

$$u = \frac{a_2 p_2}{2u_1} \ , \quad \text{etc.}$$

Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs conduisant à la relation $x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2$, vu qu'on peut achever la démonstration d'une façon plus simple. Menons en effet la circonférence passant par les points opposés latéraux D_i des pieds des hauteurs; ils sont les pieds des perpendiculaires p_i opposées aux hauteurs. Désignons par E_i les seconds points d'intersection de cette circonférence avec les côtés. Les perpendiculaires q_i élevées en ces points se coupent aussi, d'après I, en un point P_q de la courbe.

Les transversales $A_i P_p$ et $A_i P_q$ joignant les sommets aux points P_p et P_q sont, d'après I, des transversales opposées. En tenant compte des angles égaux, on a successivement

$$\frac{a_1}{q_1} = \frac{A_2 E_1 + A_3 E_1}{q_1} = \text{cotg}\, P_q A_2 E_1 + \text{cotg}\, P_q A_3 E_1 =$$

$$= \text{cotg}\, P_p A_2 D_3 + \text{cotg}\, P_p A_3 D_2 =$$

$$= \frac{a_2 \,.\, \cos \alpha_1}{p_3} + \frac{a_3 \,.\, \cos \alpha_1}{p_2} = \frac{a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3}{p_2 \cdot p_3} \,.\, \cos \alpha_1 \,,$$

$$q_1 = \frac{p_2 \; p_3}{a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3} \cdot \frac{a_1}{\cos \alpha_1}$$

et comme

$$a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 = 2a_1 \,.\, u_1 \,,$$

$$q_1 = \frac{p_2 \cdot p_3}{2u_1 \,.\, \cos \alpha_1} \,.$$

Si l'on porte cette valeur dans $A_3 E_1 = q_1 \,.\, \text{cotg}\, P_q A_3 E_1$, il vient

$$A_3 E_1 = \frac{p_2 \cdot p_3}{2u_1 \,.\, \cos \alpha_1} \cdot \frac{a_3 \cos \alpha_1}{p_2} = \frac{a_3 p_3}{2u_1} \,.$$

La valeur obtenue pour $A_3 E_1$ est donc égale à celle trouvée précédemment pour $A_2 C_1 = x$; par suite, les points C_i et E_i sont des points opposés latéraux. Ce résultat confirme le fait, mentionné plus haut, que les perpendiculaires élevées aux points C_i se coupent en un même point et conduit en outre au théorème suivant:

Les points opposés latéraux des points en lesquels les côtés sont coupés par les transversales joignant les sommets au point opposé à l'orthocentre (H) *et les points opposés latéraux des pieds des hauteurs sont sur une même circonférence.*

IV. — Soit maintenant à déterminer l'équation de la courbe parcourue par le point P (ou courbe P) pour un système de coordonnées cartésiennes. Choisissons le centre du cercle circonscrit comme origine, la perpendiculaire élevée au milieu d'un côté comme axe des x et la parallèle au côté correspondant du triangle comme axe des y (fig. 5).

Cherchons d'abord les coordonnées des sommets A_i du triangle; on trouve:

$$x_1 = - r \,.\cos \alpha_3 \,, \qquad y_1 = r \,.\sin \alpha_3 \,; \qquad (A_1)$$

$$x_2 = - r \,.\cos \alpha_3 \,, \qquad y_2 = - r \,.\sin \alpha_3 \,; \qquad (A_2)$$

$$x_3 = r \,.\cos (\alpha_1 - \alpha_2) \,, \qquad y_3 = r \,.\sin (\alpha_1 - \alpha_2) \,. \qquad (A_3)$$

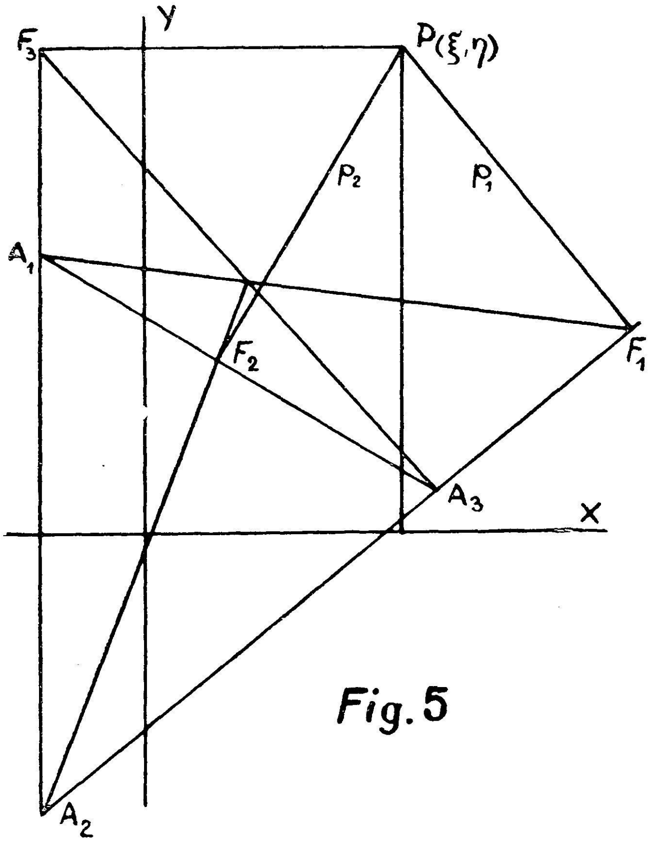


Fig. 5

Les équations des côtés du triangle sont maintenant connues et les distances p_i du point P (ξ, η) aux côtés peuvent s'exprimer en fonction de ξ et η.

Les pieds F_i des perpendiculaires p_i ont les coordonnées suivantes

$$\xi_1 = \xi + p_1 \,.\cos \alpha_2 \,, \qquad \eta_1 = \eta - p_1 \,.\sin \alpha_2 \,; \qquad (F_1)$$

$$\xi_2 = \xi - p_2 \,.\cos \alpha_1 \,, \qquad \eta_2 = \eta - p_2 \,.\sin \alpha_1 \,; \qquad (F_2)$$

$$\xi_3 = - r \,.\cos \alpha_3 \,, \qquad \eta_3 = \eta \,. \qquad (F_3)$$

Les valeurs trouvées pour les coordonnées des points A_i et F_i permettent de déterminer les équations des droites A_1F_1, A_2F_2, A_3F_3. Si on les écrit sous la forme:

$$\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 = 0$$

$$\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2 = 0$$

$$\lambda_3 x + \mu_3 y + \nu_3 = 0 \,,$$

le déterminant formé au moyen des coefficients de ces trois équations contient la condition pour que les trois transversales $A_i F_i$ issues des sommets passent par un même point.

On obtient donc comme équation du lieu des points P:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Si l'on effectue les opérations et si l'on remplace ξ et η par x et y, on obtient

$$y^3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - xy^2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - x^2 y \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 + xr^2 \sin^2\alpha_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + \\ + yr^2 . (\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cos^2\alpha_3 - \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \sin^2\alpha_3) = 0 ,$$

ou

$$Ay^3 - Bxy^2 - Cx^2y + Dx + Ey = 0 .$$

L'équation ne renfermant pas de terme constant, la courbe passe par l'origine, c'est-à-dire par le centre du cercle circonscrit. On constate en outre que l'origine est le centre de la courbe, c'est-à-dire: si P est un point remplissant la condition envisagée, il en est de même du point opposé à P (dans le sens défini plus haut).

Il en résulte d'emblée que le centre du cercle circonscrit est un point d'inflexion de la courbe.

L'équation de la courbe est de la forme

$$f_3 = \varphi_3 + \varphi_1 = 0 .$$

Si l'on pose donc l'ensemble des termes de la plus haute puissance égal à zéro, on obtient, pour la détermination des asymptotes, la relation

$$\varphi_3 = Ay^3 - Bxy^2 - Cx^2y = \\ = y . (y \cos\alpha - x_1 \sin\alpha_1) . (y \cos\alpha_2 + x \sin\alpha_2) = 0 .$$

Si l'on pose chacun des trois facteurs successivement égal à zéro, on obtient les équations des perpendiculaires élevées au milieu des côtés. Par suite: les perpendiculaires élevées aux points milieu des côtés sont les asymptotes de la courbe.

Les indications précédentes permettent de reconnaître la forme de la courbe. Elle est symétrique par rapport au centre du cercle circonscrit au triangle et se compose: 1° d'une serpentine ayant un point d'inflexion au centre du cercle circonscrit et possédant comme asymptote la perpendiculaire élevée au milieu d'un des côtés; 2° d'un ovale qui, sous la forme de deux branches hyperboliques égales, se rapproche indéfiniment des points à l'infini des deux autres perpendiculaires (fig. 6).

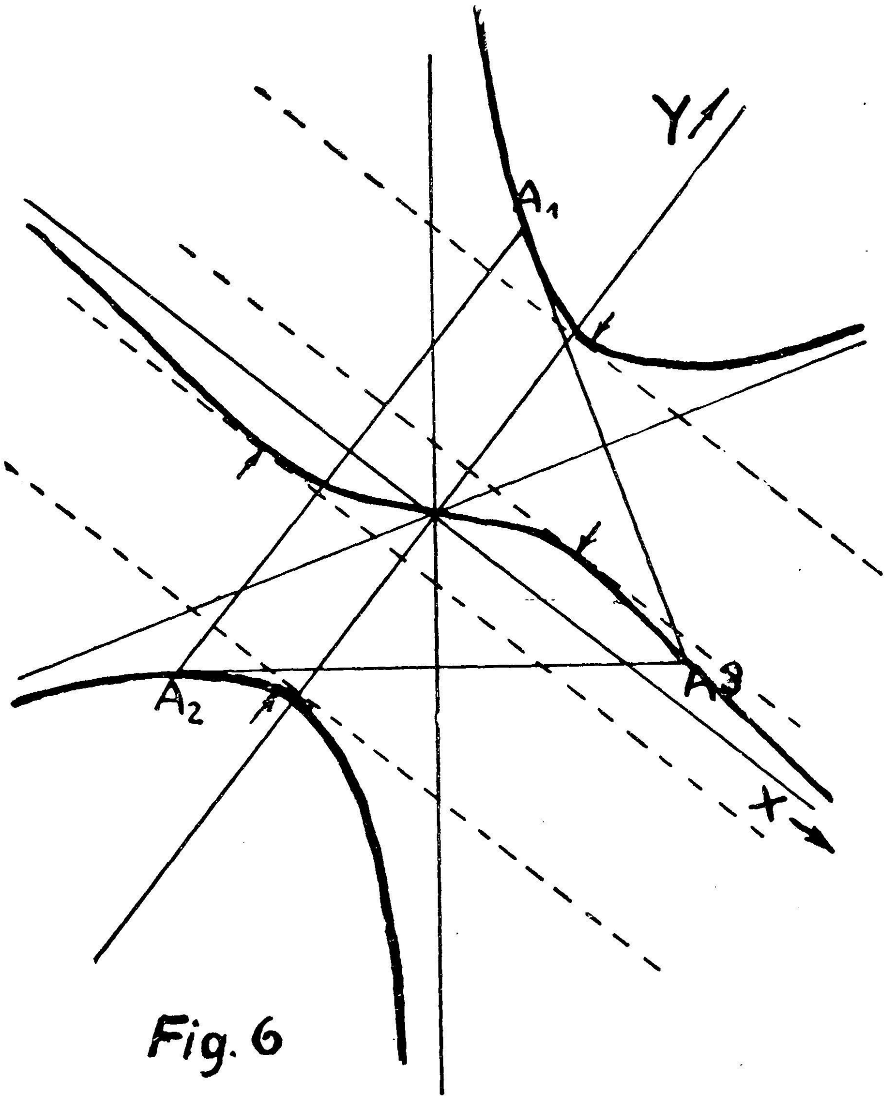


Fig. 6

V. — Il est facile de se rendre compte que la serpentine et l'ovale doivent avoir tous deux un maximum et un minimum (points le plus haut et le plus bas) par rapport à celle des trois perpendiculaires (au milieu des côtés) qui est l'asymptote de la serpentine. Les tangentes menées à la courbe en ces points le plus haut et le plus bas déterminent donc sur le côté correspondant deux segments égaux et symétriquement placés tels que les perpendiculaires en leurs différents points ne peuvent contenir aucun point réel du genre P considéré. Dans le problème qui nous occupe, il est donc important de déterminer les maxima et minima de la courbe P.

En partant de l'équation de la courbe

$$F(x, y) = Ay^3 - Bxy^2 - Cx^2y + Dx + Ey = 0 ,$$

on trouve

$$F_1(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = - By^2 - 2Cxy + D = F_1 ,$$

$$F_2(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = 3Ay^2 - 2Bxy - Cx^2 + E = F_2 ,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = - 2Cy = F_{11} .$$

Un maximum ou minimum ne peut avoir lieu que pour $F_1 = 0$, donc pour

$$By^2 + 2Cxy - D = 0 ,$$

d'où

$$x = \frac{D - By^2}{2C . y} .$$

En substituant cette valeur de x dans la relation $F(x, y) = 0$, on est conduit à l'équation suivante:

$$y^4 . (4A . C + B^2) - 2y^2 . (B . D - 2CE) + D^2 = 0 , \tag{1}$$

d'où

$$y^2 = \frac{B D - 2CE}{4A . C + B^2} \pm \sqrt{\left(\frac{B . D - 2CE}{4A . C + B^2}\right)^2 - \frac{D^2}{4A . C + B^2}} .$$

Or

$$\begin{aligned} 4A . C + B^2 &= 4 \sin \alpha_1 . \sin \alpha_2 . \cos \alpha_1 . \cos \alpha_2 + \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) = \\ &= \sin^2 (\alpha_1 + \alpha_2) = \sin^2 \alpha_3 . \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} B . D - 2C . E &= r^2 . \sin^2 \alpha_3 . \sin^2 (\alpha_1 - \alpha_2) - 2r^2 . \sin \alpha_1 . \sin \alpha_2 . \\ &\qquad . (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 . \cos^2 \alpha_3 - \cos \alpha_1 . \cos \alpha_2 . \sin^2 \alpha_3) \\ &= r^2 . \sin^2 \alpha_3 . (\sin^2 \alpha_1 . \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_1 . \sin^2 \alpha_2) \\ &\qquad - 2r^2 . \sin^2 \alpha_1 . \sin^2 \alpha_2 . \cos^2 \alpha_3 = \qquad (3) \\ &= r^2 . \sin^2 \alpha_1 . (\sin^2 \alpha_3 . \cos^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_2 . \cos^2 \alpha_3) \\ &\qquad + r^2 . \sin^2 \alpha_2 (\sin^2 \alpha_3 . \cos^2 \alpha_1 - \sin^2 \alpha_1 . \cos^2 \alpha_3) \\ &= r^2 . (\sin^3 \alpha_1 . \sin (\alpha_3 - \alpha_2) + \sin^3 \alpha_2 . \sin (\alpha_3 - \alpha_1)) . \qquad (4) \end{aligned}$$

En utilisant (2) et (3), on trouve en outre

$$\sqrt{\left(\frac{B.D - 2C.E}{4A.C + B^2}\right)^2 - \frac{D^2}{4A.C + B^2}} =$$

$$r^2 . \sqrt{(\sin^2\alpha_1.\cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1.\sin^2\alpha_2 - 2\sin^2\alpha_1.\sin^2\alpha_2.\cot g^2\alpha_3)^2 - (\sin\alpha_3.\sin(\alpha_1 - \alpha_2))^2}.$$

Si l'on décompose en facteurs l'expression sous la racine qui est une différence de deux carrés, on obtient pour le radical, après quelques transformations:

$$\frac{4\sin^3\alpha_1 . \sin^3\alpha_2 . \sin(\alpha_3 - \alpha_1) . \sin(\alpha_3 - \alpha_2)}{\sin^4\alpha_3}.$$

Par suite

$$y^2_{1,2} = \frac{r^2}{\sin^2\alpha_3} . (\sin^3\alpha_1 . \sin(\alpha_3 - \alpha_2) + \sin^3\alpha_2 . \sin(\alpha_3 - \alpha_1) \pm$$
$$\pm 2 . \sqrt{\sin^3\alpha_1 . \sin(\alpha_3 - \alpha_2) . \sin^3\alpha_2 . \sin(\alpha_3 - \alpha_1)}) \; ; \quad (5)$$

$$y_{1-4} = \pm \frac{r}{\sin\alpha_3} . (\sin\alpha_1 . \sqrt{\sin\alpha_1 . \sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \pm$$
$$\pm \sin\alpha_2 . \sqrt{\sin\alpha_2 . \sin(\alpha_3 - \alpha_1)}) .$$

Cette expression nous montre d'abord que les valeurs de y ne peuvent être réelles que si α_3 est le plus grand angle, donc a_3 le plus grand côté, la perpendiculaire choisie comme axe des x étant alors la plus petite des trois perpendiculaires élevées au milieu des côtés. La serpentine se rapproche donc indéfiniment de la plus petite des trois perpendiculaires et c'est seulement sur le plus grand des trois côtés qu'il existe deux segments tels que les perpendiculaires en leurs différents points ne contiennent aucun point P réel du genre considéré.

Il est encore nécessaire d'examiner l'expression

$$F_2 = 3Ay^2 - 2Bxy - Cx^2 + E .$$

Si l'on y porte la valeur $x = \frac{D - By^2}{2C . y}$ tirée de l'équation $F_1 = 0$ et qu'on réduise toute l'expression au même dénominateur $4Cy^2$, on obtient

$$F_2 = \frac{3y^4 . (4A . C + B^2) - 2y^2 . (B . D - 2CE) - D^2}{4Cy^2} .$$

De (1) résulte

$$-D^2 = y^4.(4A.C + B^2) - 2y^2.(BD - 2CE) ,$$

donc

$$F_2 = 4y^4.(4A.C + B^2) - 4y^2.(BD - 2CE) ,$$

ou, en tenant compte de (2), (4) et (5):

$$F_2 = \pm 2.\sqrt{\sin^3\alpha_1 . \sin(\alpha_3 - \alpha_2) . \sin^3\alpha_2 . \sin(\alpha_3 - \alpha_1)} .$$

F_2 est donc positif pour les valeurs de y résultant de y_1^2 (5) et négatif pour les valeurs de y résultant de y_2^2. La courbe possède donc bien les maxima et minima présumés. Ceux-ci peuvent être facilement construits, ainsi que le fait constater l'examen de leurs coordonnées. Dans la figure 6, ils sont indiqués par des flèches et les droites pointillées sont les tangentes correspondantes.

VI. — Le problème traité dans ce travail possède une certaine analogie avec le suivant:

Diviser les côtés d'un triangle de telle manière que les segments déterminés sur les côtés satisfassent aux deux relations

$$x.y.z = -u.v.w \tag{1}$$

et

$$x^2 + y^2 + z^2 = u^2 + v^2 + w^2 , \tag{2}$$

c'est-à-dire de manière que: 1° les trois points de division soient en ligne droite et 2° les perpendiculaires élevées en ces points de division se coupent en un même point. Le lieu du point d'intersection des perpendiculaires est, comme on sait, le cercle circonscrit, tandis que la droite est connue sous le nom de droite de Simson.

Par analogie avec le théorème:

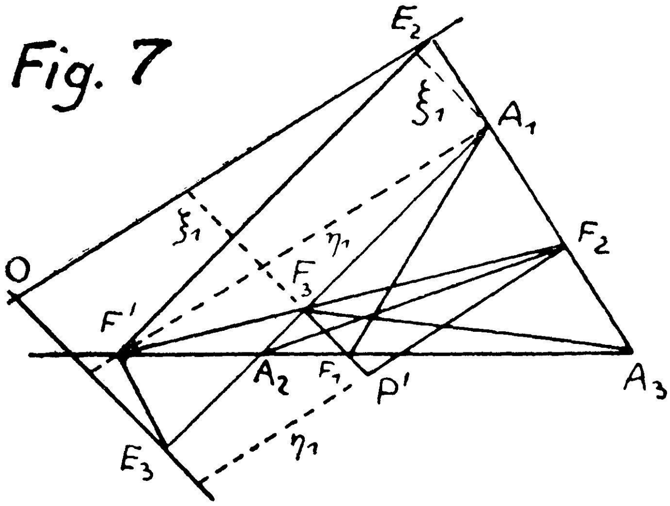
Si l'on abaisse d'un point du cercle circonscrit à un triangle les perpendiculaires sur les côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite, le théorème qui nous occupe peut donc s'exprimer de la façon suivante:

Si l'on abaisse d'un point de la courbe P *les perpendiculaires sur les côtés d'un triangle et qu'on joigne leurs pieds aux sommets* *opposés, les trois transversales ainsi obtenues passent par un même point.*

En se proposant de construire le point P, on a à résoudre le problème suivant: Etant donné un point quelconque d'un côté d'un triangle, déterminer sur chacun des deux autres côtés un point tel que les perpendiculaires élevées en ces trois points sur les côtés, d'une part, et les transversales joignant ces points aux sommets opposés, d'autre part, se coupent respectivement en un même point.

D'après les considérations du paragraphe précédent, la résolution de ce problème est limitée, vu qu'il n'existe pas de solution

Fig. 7



réelle pour les points des deux segments déterminés sur le plus grand côté par les tangentes correspondant aux maxima et minima.

Avant de passer à la construction, nous établirons encore les faits suivants:

Soit F_1 un point quelconque du côté $A_2 A_3$ et F' son conjugué harmonique (fig. 7). Si l'on mène par F' une transversale quelconque coupant les côtés $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$ aux points respectifs F_3 et F_2, les droites $A_i F_i$ se coupent toujours en un même point.

Elevons maintenant en F_2 et F_3 les perpendiculaires sur les côtés correspondants; soit P' leur point d'intersection.

Pour déterminer le lieu des points P', menons par F' les parallèles $F' E_2$ et $F' E_3$ aux côtés $A_1 A_2$ et $A_1 A_3$. Elevons en E_2 et E_3 les perpendiculaires sur les côtés; elles se coupent en O, forment entre elles l'angle α_1 et seront choisies comme système d'axes de coordonnées. Menons maintenant par A_1 les parallèles ξ_1 et η_1 aux axes et par P' les parallèles ξ' et η'. On a alors:

$$\frac{A_1 E_3}{F_3 E_3} = \frac{F_2 F'}{F_3 F'} ; \qquad \frac{F_2 E_2}{A_1 E_2} = \frac{F_2 F'}{F_3 F'} .$$

Par suite

$$\frac{A_1 E_3}{F_3 E_3} = \frac{F_2 E_2}{A_1 E_2} ,$$

$$A_1 E_3 \,.\, A_1 E_2 = F_2 E_2 \,.\, F_3 E_3 .$$

D'après la figure, on a

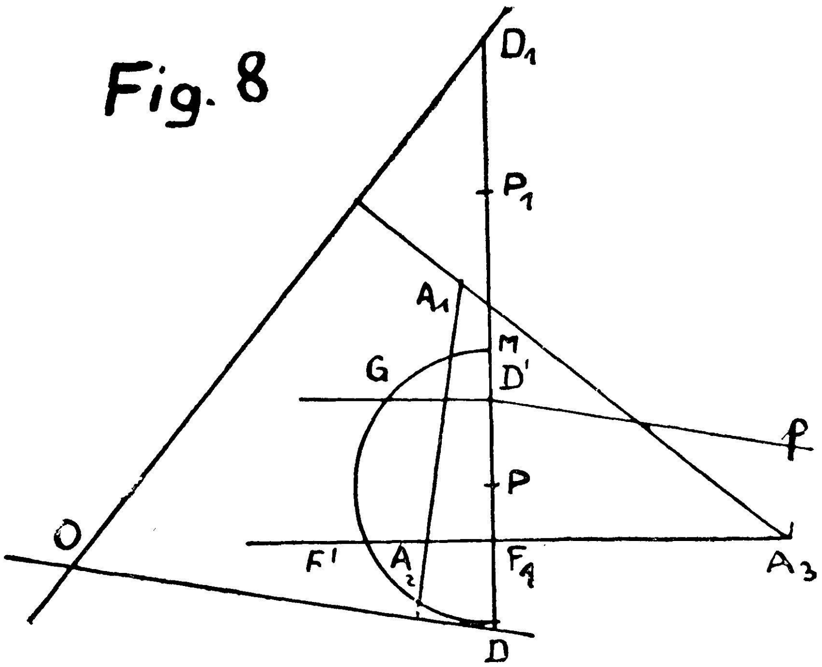
$$A_1 E_3 = \eta_1 \,.\, \sin \alpha_1 , \qquad A_1 E_2 = \xi_1 \,.\, \sin \alpha_1 ,$$
$$F_2 E_2 = \xi' . \sin \alpha_1 , \qquad F_3 E_3 = \eta' . \sin \alpha_1 .$$

L'équation devient donc

$$\xi_1 \,.\, \eta_1 = \xi' . \eta' .$$

Le lieu des points P' est par conséquent une hyperbole dont les asymptotes sont les droites OE_2 et OE_3.

Fig. 8



Pour construire les points P, de la nature considérée, correspondant à F_1, on a donc à déterminer les points d'intersection de cette hyperbole avec la perpendiculaire élevée en F_1.

Soient D et D_1 les points d'intersection de cette perpendiculaire avec les asymptotes (fig. 8). Appelons D′ le point d'intersection de la polaire du point D — facile à construire au moyen du point A_1 de l'hyperbole — avec la droite DD_1. En désignant les points d'intersection cherchés de DD_1 et de l'hyperbole par P et P_1, on a

$$DP = D_1P_1 = x .$$

On peut alors poser la proportion

$$\frac{x}{DD_1 - x} = \frac{DD' - x}{D_1D' - x} ,$$

d où

$$2x^2 - 2DD_1 x + DD_1 . DD' = 0 ;$$

$$x = \frac{DD_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{DD_1}{2}\right)^2 - \frac{DD_1 . DD'}{2}} .$$

Il en résulte la construction suivante : Avec $DM = \frac{DD_1}{2}$ comme diamètre on décrit une demi-circonférence et on élève en D′ la perpendiculaire sur DM; soit G son point d'intersection avec la circonférence. Si l'on construit alors le cercle de centre M et de rayon MG, ses points d'intersection avec la droite DD_1 sont les points cherchés P et P_1. Les pieds des perpendiculaires abaissées de ces points sur les côtés satisfont à la condition du problème.

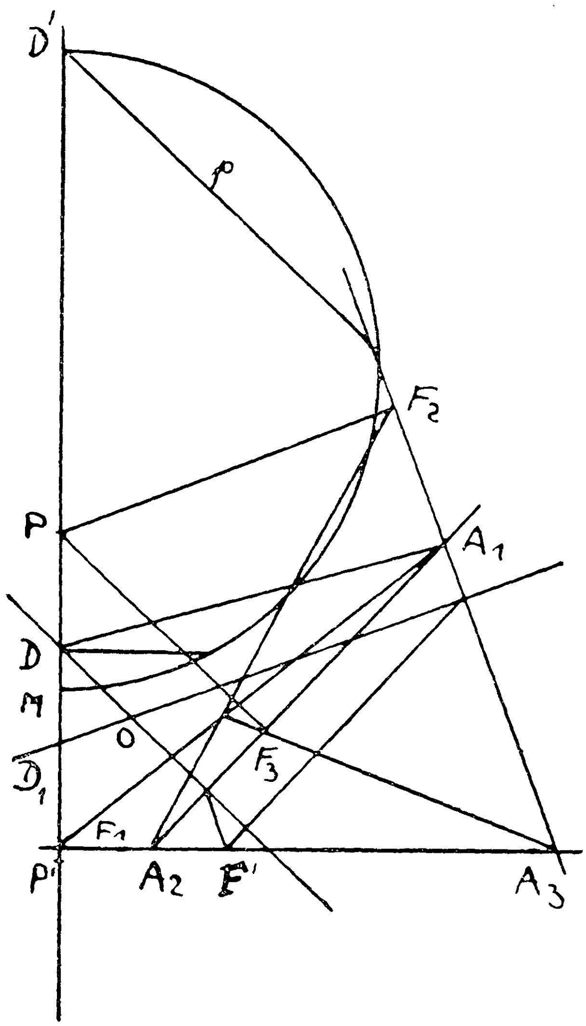


Fig. 9

Dans la fig. 9, la construction est effectuée pour le cas où F_1 est un point de *division extérieure* du côté

A_2A_3. Les points A_1 et F_1 n'appartiennent alors pas au même angle des asymptotes et la proportion ci-dessus devient:

$$\frac{x}{DD_1 + x} = \frac{DD' - x}{D_1D' + x},$$

d'où

$$x = -\frac{DD_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{DD_1}{2}\right)^2 + \frac{DD_1 . DD'}{2}}.$$

VII. — Pour terminer, nous examinerons encore un cas spécial qui conduit à quelques résultats remarquables (fig. 10).

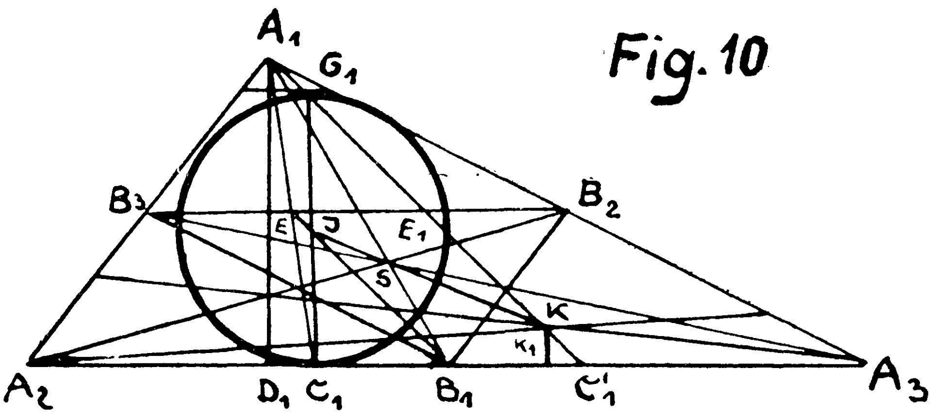


Fig. 10

Les côtés d'un triangle sont touchés par les cercles ex-inscrits aux points opposés latéraux C_i' des points de contact C_i du cercle inscrit. Soit K le point d'intersection des transversales joignant ces points C_i' aux sommets. On a

$$C_1B_1 = C_1'B_1 = \frac{a_2 - a_3}{2}.$$

$$\operatorname{tg} D_1A_1C_1' = \frac{C_1D_1}{A_1D_1} = \frac{p - a_3 - a_3 . \cos\alpha_2}{h_1}.$$

De

$$2\Delta = a_1 . h_1 = 2\rho . p$$

résulte

$$h_1 = \frac{2\rho . p}{a_1}.$$

Donc

$$\frac{C_1'D_1}{A_1D_1} = \frac{(p - a_3 - a_3 . \cos\alpha_2) . a_1}{2\rho . p}.$$

Or

$$p - a_3 = \frac{a_1 + a_2 - a_3}{2} \qquad \text{et} \qquad a_1 \,.\, a_3 \,.\, \cos \alpha_2 = \frac{a_1^2 + a_3^2 - a_2^2}{2} .$$

Par suite

$$\frac{C_1' D_1}{A_1 D_1} = \frac{(a_1 + a_2 - a_3)\,.\,a_1 - (a_1^2 + a_3^2 - a_2^2)}{4\rho \,.\, p} =$$

$$= \frac{a_1 \cdot (a_2 - a_3) + (a_2 + a_3)\,.\,(a_2 - a_3)}{4\rho \,.\, p} =$$

$$= \frac{a_2 - a_3}{2\rho} .$$

De là résulte d'emblée que la droite $A_1 C_1'$ passe par l'extrémité G_1 du diamètre du cercle inscrit partant du point C_1. Il s'en suit en outre que la droite de jonction du point milieu B_1 du côté au centre J du cercle inscrit est parallèle à $A_1 C_1'$ et que le point J a pour le triangle $B_1 B_2 B_3$ des milieux des côtés la signification du point K.

Soient E_1 et E_1' les points correspondant à C_1 et C_1' pour le triangle des points milieu des côtés. On a alors

$$B_2 E_1 = B_3 E_1' = \frac{p - a_2}{2}$$

et la droite $A_1 C_1$ passe par le point d'intersection des droites $B_2 B_3$ et B_1 J. Donc

$$E_1' J = \frac{1}{2} A_1 G_1 \qquad \text{et} \qquad E_1' J = \frac{1}{2} K C_1' ,$$

d'où

$$A_1 G_1 = K C_1' .$$

Le résultat des considérations qui précèdent peut donc s'exprimer sous la forme du théorème suivant:

Théorème. — *Les transversales joignant les sommets d'un triangle aux points opposés latéraux des points de contact du cercle inscrit coupent le cercle inscrit aux extrémités des diamètres perpendiculaires aux côtés et de manière à ce que les segments supérieurs déterminés sur ces transversales par le cercle inscrit soient égaux aux segments inférieurs de ces transversales.*

Il en résulte que

$$JB_1 = \frac{1}{2} G_1 C_1' = \frac{1}{2} A_1 K \ .$$

Si l'on joint encore J à K et qu'on désigne le point d'intersection des droites JK et $A_1 B_1$ par S, on obtient deux triangles semblables SJB_1 et SKA_1 fournissant la relation

$$JS : KS = B_1 S : A_1 S = JB_1 : A_1 K = 1 : 2 \ ,$$

c'est-à-dire que le point d'intersection S que nous venons d'envisager n'est autre que le *centre de gravité* du triangle $A_1 A_2 A_3$. On obtient ainsi le théorème suivant:

THÉORÈME. — *Dans tout triangle, le centre du cercle inscrit, le centre de gravité et le point d'intersection des transversales joignant les sommets aux points opposés latéraux des points de contact du cercle inscrit sont en ligne droite et le centre de gravité divise la distance des deux autres points dans le rapport* 1: 2. *Le centre du cercle inscrit dans le triangle des points milieu des côtés est aussi sur cette droite qu'il divise en deux parties égales.*

Cette droite a donc une grande analogie avec la droite d'Euler, qui est, comme on sait, divisée en deux parties égales par le centre du cercle circonscrit au triangle des points milieu des côtés (cercle de Feuerbach).

Les longueurs des perpendiculaires k_i abaissées du point K sur les côtés sontfaciles à déterminer. On a

$$k_i = h_i - 2\rho \ .$$

On peut supposer que les propriétés démontrées ci-dessus sont aussi applicables aux cercles ex-inscrits. Le même procédé de démonstration permet de confirmer cette supposition. Si l'on appelle *transversales de contact* les transversales joignant les sommets aux points de contact et *transversales opposées de contact* celles qui passent par les points opposés latéraux des points de contact, on obtient les théorèmes généralisés suivants:

THÉORÈME 1. — *Les transversales opposées de contact coupent le cercle tangent correspondant aux extrémités des diamètres perpendiculaires aux côtés et de telle manière que les segments* *supérieurs déterminés par le cercle sur ces transversales soient égaux aux segments inférieurs de ces transversales.*

THÉORÈME 2. — *Dans tout triangle:*

1° *Le centre de chaque cercle tangent,*

2° *Le centre de gravité,*

3° *Le point d'intersection des transversales opposées de contact correspondantes,*

sont en ligne droite et le centre de gravité divise la distance des deux autres points dans le rapport 1 : 2. *Le centre du cercle correspondant pour le triangle des points milieu des côtés est aussi sur cette droite qu'il divise en deux parties égales.*

N. B. — Pour simplifier, les cercles inscrit et ex-inscrits ont été appelés les cercles tangents.

AGRÉGATION DE MATHÉMATIQUES (1928)

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques élémentaires (6 heures). — *On donne deux droites* Δ, Δ', *non situées dans un même plan;* Oz *est leur perpendiculaire commune,* O *le milieu de cette perpendiculaire commune,* Ox, Oy *les bissectrices des angles formés par les parallèles à* Δ *et* Δ', *issues du point* O.

1° *Démontrer que le lieu des points d'un plan perpendiculaire à* Ox (*ou à* Oy), *équidistants de* Δ *et* Δ' *est une droite* g (*ou* h) *rencontrant* Ox (*ou* Oy).

Relation entre la distance de cette droite au point O *et l'angle qu'elle fait avec* Oz.

2° *On demande d'étudier les plans* P *tels que la symétrique de l'une des deux droites* Δ, Δ', *par rapport à chacun de ces plans, rencontre l'autre ou lui est parallèle.*

Montrer que chaque plan P *contient une droite* g (*ou* h) *et réciproquement.*