

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1929)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES OVALES DE DESCARTES  
**Autor:** Dufour, M.  
**Kapitel:** 4. — Sécantes passant par un foyer.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-22597>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Partons du sommet  $A_1$ : l'inversion  $m_1^2$  nous mène en  $B_1$ , puis l'inversion  $m_2^2$  nous mène en  $A_2$ , et enfin l'inversion  $m_3^2$  nous ramène en  $A_1$ . Donc  $m_1^2 \cdot m_2^2 \cdot m_3^2 = 1$ .

Le foyer  $F_3$  a même puissance par rapport aux deux cercles de diamètre  $A_1A_2$  et  $B_1B_2$ : il est donc sur leur axe radical. Puisque, connaissant l'équation bipolaire  $\lambda_1 c_1 - \lambda_2 c_2 + h_3 = 0$  d'une ovale, on en déduit facilement l'équation de l'ovale conjuguée et la position des sommets de cette dernière, nous obtenons ainsi une seconde construction du foyer extérieur  $F_3$ . On voit sans peine que  $F_1$  et  $F_2$  pourraient aussi se trouver par une construction d'axe radical:  $F_1$  est sur l'axe radical des deux cercles décrits sur  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  comme diamètres, et la corde commune aux deux cercles décrits sur  $A_1B_2$  et  $A_2B_1$  comme diamètres passe par  $F_2$ .

*Cercle tangent à l'ovale et passant par deux points donnés dont un de ses foyers.* — L'inversion anallagmatique autour du foyer par lequel doit passer le cercle à construire transforme ce cercle en une droite tangente à l'ovale et passant par le point inverse de l'autre point donné. Le point inverse de son point de contact avec l'ovale est le point où le cercle à construire touche l'ovale. En particulier, le cercle passant par  $F_1$  et  $F_2$  et tangent à l'ovale se déduit par inversion autour du foyer  $F_1$ , par exemple, de la tangente à l'ovale conjuguée qui passe par l'inverse de  $F_2$ .

#### 4. — *Sécantes passant par un foyer.*

D'une propriété bien connue de la transformation par rayons vecteurs réciproques, il résulte immédiatement que: 1° toute sécante à l'ovale menée par  $F_1$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points situés d'un même côté de l'axe où elle coupe les deux ovales conjuguées; 2° toute sécante menée par  $F_2$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points situés de part et d'autre de l'axe où elle coupe ces deux ovales; 3° toute sécante menée par  $F_3$  est bissectrice des directions des tangentes aux deux points où elle coupe chacune des ovales intérieure et extérieure.

Si entre l'équation de l'ovale en coordonnées polaires rapportée à un de ses foyers et l'équation d'une droite quelconque de son plan

$$\rho(p \cos \theta + q \sin \theta) = r$$

on élimine  $\theta$ , on obtient une équation du quatrième degré en  $\rho$  dont les quatre racines sont les distances des foyers aux points d'intersection de la droite et de la courbe. Dans cette équation le quotient des coefficients de  $\rho^3$  et de  $\rho^4$  est une constante: donc la somme des quatre rayons vecteurs menés d'un foyer aux points d'intersection de la courbe avec une droite quelconque est constante. Nous pouvons le voir par des considérations géométriques simples dans le cas où la sécante passe par le foyer.

Par l'axe de l'un des cônes,  $S_1$  par exemple, menons un plan vertical quelconque  $V'$ . L'intersection de  $V'$  avec le cône  $S_2$  est une hyperbole à axe réel vertical. Le centre  $S'_2$  de cette hyperbole est toujours dans le plan horizontal qui passe par  $S_2$ , et l'angle de ses asymptotes est égal à l'angle au sommet du cône  $S_2$  (fig. 2).

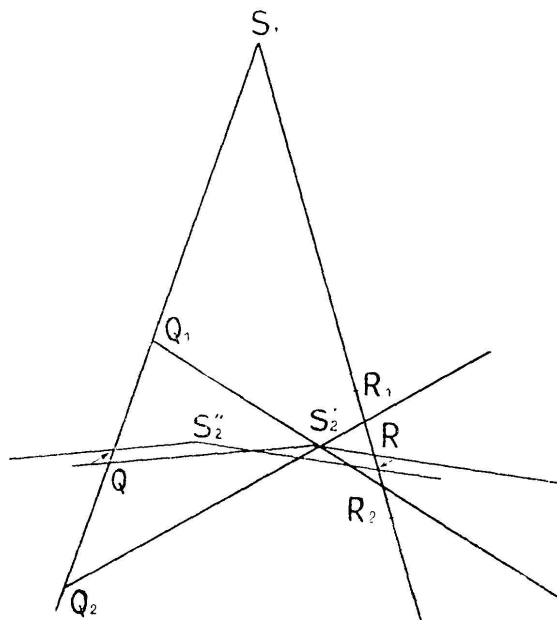


Fig. 2.

L'intersection de  $V'$  avec le cône  $S_1$  se compose de deux génératrices de ce cône. Soient  $Q_1, Q_2, R_1, R_2$  les points d'intersection de ces deux génératrices avec l'hyperbole, et  $S'_2Q, S'_2R$  les diamètres conjugués des cordes  $Q_1 Q_2$  et  $R_1 R_2$ . Ces diamètres sont

comme les cordes correspondantes également inclinés sur la verticale. Nous avons

$$S_1 Q_1 + S_1 Q_2 = 2S_1 Q \quad \text{et} \quad S_1 R_1 + S_1 R_2 = 2S_1 R .$$

Faisons tourner le plan  $V'$  autour de l'axe du cône  $S_1$ : l'angle des deux génératrices passant par  $S_1$  ne change pas,  $S_2'$  se déplace dans  $V'$  le long d'une droite horizontale et vient en  $S_2''$ . L'angle des asymptotes ne change pas et par suite le système des deux diamètres conjugués subit une translation horizontale: les déplacements de  $Q$  et  $R$  sur les génératrices de  $S_1$  sont égaux et de sens contraire et la somme  $S_1 Q + S_1 R$  reste constante, quelle que soit l'orientation de  $V'$ . Projétons sur la trace horizontale de  $V'$ : nous voyons que la somme des distances d'un foyer aux points d'intersection de la courbe avec une sécante quelconque passant par ce foyer est constante.

Si nous prenons comme sécante l'axe  $F_1 F_2$ , nous voyons de plus que la constante est la même pour les foyers  $F_1$  et  $F_2$ .

### 5. — *Le foyer singulier.*

Les trois points  $F_1, F_2, F_3$ , auxquels leur propriété optique a fait donner le nom de foyers, sont aussi des foyers répondant à la définition de Plücker: le calcul prouve que ce sont les points d'intersection de tangentes menées à l'ovale par les points cycliques du plan.

L'ovale possède aussi un *foyer singulier*: elle passe par les points cycliques du plan et a des asymptotes qui la touchent en ces points.

Si nous supposons que  $S_2$  se déplace sur la verticale  $F_2 S_2$  (fig. 1), c'est-à-dire si nous faisons varier  $h_3$  en laissant fixes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , nous obtenons une famille d'ovales définies par la relation  $\lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 = -h_3$ , où  $h_3$  est un paramètre variable. Dans l'équation en coordonnées cartésiennes correspondante, les termes du quatrième et du troisième degré sont indépendants de  $h_3$ , et, par suite, toutes ces ovales ont les mêmes asymptotes<sup>1</sup>. Il nous

<sup>1</sup> L'équation cartésienne de l'ovale de Descartes ne diffère que par une constante de celle du limaçon qui fait partie de la famille. L'ovale est le lieu des points d'égale puissance par rapport au limaçon.