

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES
Autor: Stoyanoff, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-22601>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR
LES CONDITIONS D'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS
DIFFÉRENTIELLES

PAR

A. STOYANOFF (Sofia).

PROBLÈME. — *Etant donnée une « fonction différentielle », d'ordre n,*

$$F_n(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) ,$$

déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit la dérivée exacte d'une fonction différentielle, d'ordre (n — 1),

$$\Phi_{n-1}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

et déterminer celle-ci ¹.

Ce problème a été traité par plusieurs mathématiciens, parmi lesquels il faut citer Euler, Condorcet, Lexell, Lagrange, Poisson, Sarrus, Joachimsthal, Raabe, J. Bertrand. C'est Euler qui le premier a montré que la condition nécessaire et suffisante est

$$\nabla_n F_n \equiv 0 ,$$

en désignant pour abrégier par $\nabla_n \varphi$ l'opérateur suivant ²

$$\nabla_n \varphi = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k (\Delta_k \varphi) .$$

¹ y est considéré comme fonction de x ; $y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}$.

² Nous avons posé

$$\Delta_k = \frac{\partial}{\partial y^{(k)}} , \quad \Delta_0 = \frac{\partial}{\partial y} , \quad \Delta = \frac{\partial}{\partial x} , \quad D^k = \frac{d^k}{dx^k} .$$

On arrive facilement à cette solution, par le calcul des variations, en exprimant que l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} F_n(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx$$

ne dépend pas de la forme de la fonction $y(x)$.

Malgré son élégance, cette méthode se prête mal à la détermination *effective* de la fonction Φ_{n-1} . Dans un mémoire paru dans le *Journal de math. pures et appliquées*, t. 14, J. Bertrand a donné une méthode très commode pour le calcul de Φ_{n-1} . Pour mieux comprendre cette méthode, nous allons traiter un cas particulier.

Soit

$$F_3 = 2x + y^2 + (2xy - 1)y' + xy'' + x^2y''' .$$

En remarquant que

$$x^2y''' = D(x^2y'') - 2xy'' ,$$

F_3 peut se mettre sous la forme

$$F_3 = D(x^2y'') + F_2 \quad \text{avec} \quad F_2 = 2x + y^2 + (2xy - 1)y' - xy'' .$$

On a de même

$$F_2 = D(-xy') + F_1 \quad \text{avec} \quad F_1 = 2x + y^2 + 2xyy' ,$$

$$F_1 = D(xy^2) + F_0 \quad \text{avec} \quad F_0 = 2x = D(x^2) .$$

Par conséquent,

$$F_3 = D(x^2y'' - xy' + xy^2 + x^2) = D\Phi_2 .$$

Dans l'introduction de son mémoire, Bertrand écrit: « Ma méthode diffère notablement de celle d'Euler et il faudrait des calculs compliqués pour vérifier directement leur concordance... »

Nous nous proposons de montrer qu'on peut par des calculs *très simples* et élémentaires arriver à la condition d'Euler, tout en suivant la méthode de Bertrand.

THÉORÈME. — La condition *nécessaire et suffisante* pour que la fonction différentielle, d'ordre n ,

$$F_n(x, y, y', \dots, y^{(n)})$$

soit la dérivée exacte d'une certaine fonction différentielle, d'ordre $(n - 1)$,

$$\Phi_{n-1}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) ,$$

est que l'expression

$$\begin{aligned} \nabla_n F_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k (\Delta_k F_n) &= \Delta_0 F_n - D(\Delta_1 F_n) + D^2(\Delta_2 F_n) \\ &- \dots + (-1)^n D^n (\Delta_n F_n) \end{aligned}$$

soit identiquement nulle.

A. Nous allons démontrer que si le théorème est vrai pour les fonctions d'ordre n , il le sera également pour celles d'ordre $(n + 1)$.

§ 1. On remarque immédiatement que F_{n+1} est nécessairement de la forme

$$F_{n+1} = P_n + Q_n y^{(n+1)} ,$$

P_n et Q_n étant des fonctions différentielles d'ordre n .

§ 2. Désignons par \bar{F}_n la fonction, d'ordre n ,

$$\int Q_n dy^{(n)} .$$

On a

$$\Delta_n \bar{F}_n = Q_n \quad \text{ce qui est égal à} \quad \Delta_{n+1} F_{n+1} .$$

Comme on a

$$D\bar{F}_n = \Delta\bar{F}_n + \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \bar{F}_n \cdot y^{(k+1)} + Q_n y^{(n+1)} ,$$

on voit immédiatement que

$$F_{n+1} = D\bar{F}_n + F_n ,$$

F_n désignant la fonction d'ordre n suivante

$$F_n = P_n - \Delta\bar{F}_n - \sum_{k=0}^{n-1} \Delta_k \bar{F}_n \cdot y^{(k+1)} .$$

§ 3. Calculons $\nabla_n F_n$. On a ¹

$$\begin{aligned} \nabla_n F_n &= \nabla_n F_{n+1} - \nabla_n (D\bar{F}_n) = \nabla_n F_{n+1} - \Delta_0 (D\bar{F}_n) - \sum_{k=1}^n (-1)^k D^k (\Delta_k D\bar{F}_n) \\ &= \nabla_n F_{n+1} - D(\Delta_0 \bar{F}_n) + \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} D^k (D\Delta_k \bar{F}_n + \Delta_{k-1} \bar{F}_n) \\ &= \nabla_n F_{n+1} + (-1)^{n+1} D^{n+1} (\Delta_n \bar{F}_n) \\ &= \nabla_n F_{n+1} + (-1)^{n+1} D^{n+1} (\Delta_{n+1} F_{n+1}) = \nabla_{n+1} F_{n+1}. \end{aligned}$$

§ 4. Bref, on a

$$F_{n+1} = D\bar{F}_n + F_n \quad \text{et} \quad \nabla_{n+1} F_{n+1} = \nabla_n F_n.$$

Par conséquent, si F_{n+1} est une dérivée exacte, F_n l'est également; mais alors, par hypothèse, $\nabla_n F_n \equiv 0$; par conséquent $\nabla_{n+1} F_{n+1} \equiv 0$.

Inversement, si $\nabla_{n+1} F_{n+1} \equiv 0$, $\nabla_n F_n$ est aussi identiquement nul; mais alors, par hypothèse, F_n est une dérivée exacte; par conséquent F_{n+1} est également une dérivée exacte.

B. Comme le théorème est vrai pour $n = 0$, il le sera pour toutes les valeurs de n .

¹ Puisque

$$\begin{aligned} \Delta_k (D\varphi) &= \Delta_k (\Delta\varphi + \Delta_0 \varphi \cdot y' + \dots + \Delta_{k-1} \varphi \cdot y^{(k)} + \dots) \\ &= \Delta_{k-1} \varphi + [\Delta (\Delta_k \varphi) + \Delta_0 (\Delta_k \varphi) y' + \dots + \Delta_{k-1} (\Delta_k \varphi) y^{(k)} + \dots] \\ &= \Delta_{k-1} \varphi + D(\Delta_k \varphi); \end{aligned}$$

on a de même $\Delta_0 (D\varphi) = D(\Delta_0 \varphi)$.