

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 28 (1929)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UN THÉORÈME DE WILSON
Autor: Toscano, Letterio
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-22604>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR UN THÉORÈME DE WILSON

PAR

Letterio TOSCANO (à Messine).

1. — Sur le développement de $n! = 1.2\dots n$ on connaît la relation fondamentale de LEGENDRE

$$n! = n^n - \binom{n}{1}(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \dots \\ + (-1)^{n-2} \binom{n}{2} 2^n + (-1)^{n-1} \binom{n}{1}, \quad (1)$$

avec $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, amplement étudiée dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*¹, dans le *Giornale di Matematiche di Battaglini*², dans *La Matematica Elementare*³, dans le *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*⁴. Une démonstration de la (1) peut être lue dans les *Lezioni di Calcolo Infinitesimale*, par E. PASCAL (Part. III, Calcolo delle variazioni e delle differenze finite, p. 231; 2^{me} édition, Hoepli, Milano, 1918), fondée sur les différences finies de O^n . Mais on peut faire déduire (1) de relations plus générales.

Ainsi, si

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

est un polynome entier par rapport à x , on a

$$f(x) - \binom{n}{1} f(x+h) + \binom{n}{2} f(x+2h) - \dots \\ + (-1)^n f(x+nh) = (-1)^n a_0 n! h^n. \quad (2)$$

¹ Années 1895, p. 165; 1896, pp. 26 et 299; 1897, p. 59; 1899, pp. 51 et 284; 1900, pp. 22 et 280; 1901, p. 164.

² T. 31, 1894; T. 40, 1902.

³ Année 3, 1924, p. 123.

⁴ Année 6, 1927, p. 187.

On a

$$\Delta^{(1)}f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$\Delta^{(2)}f(x) = f(x) - 2f(x+h) + f(x+2h)$$

$$(-1)\Delta^{(3)}f(x) = f(x) - 3f(x+h) + 3f(x+2h) - f(x+3h)$$

$$\Delta^{(4)}f(x) = f(x) - 4f(x+h) + 6f(x+2h) - 4f(x+3h) + f(x+4h)$$

et par la méthode d'induction

$$(-1)^n \Delta^{(n)}f(x) = f(x) - \binom{n}{1}f(x+h) + \binom{n}{2}f(x+2h) - \dots + (-1)^n f(x+nh) .$$

Si

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

on a

$$\Delta^{(n)}f(x) = a_0 n! h^n$$

et de là la (2)

Autrement par le théorème de LAGRANGE sur les dérivées on a

$$\Delta^{(1)}f(x) = hf'(x + \theta'h)$$

avec $0 < \theta' < 1$;

$$\begin{aligned} \Delta^{(2)}f(x) &= h\{f'(x+h+\theta'h) - f'(x+\theta'h)\} \\ &= h^2 f''(x + \theta''h) ; \end{aligned}$$

et enfin

$$\Delta^{(n)}f(x) = h^n f^{(n)}(x + \theta^{(n)}h) .$$

Mais

$$f^{(n)}(x + \theta^{(n)}h) = a_0 n!$$

et de là suit la formule (2).

3. — Nous supposons $n > 2$ nombre premier et si a n'est pas multiple de n , le nombre $a^{n-1} - 1$ est divisible par n (FERMAT).

Ainsi

$$\begin{aligned} 2^{n-1} &= 1 + nB' & (n-2)^{n-1} &= 1 + nB \\ 3^{n-1} &= 1 + nC' & (n-3)^{n-1} &= 1 + nC \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

étant B, B', ..., C, C', ... nombres entiers.

En outre $(n - 1)^n = (-1)^n + nA$ avec A entier.

Alors la relation de LEGENDRE, divisée par n , nous donne

$$(n - 1)! = n^{n-1} + (-1)^{n+1} - nA + \binom{n-1}{2}(1 + nB) \\ - \binom{n-1}{3}(1 + nC) + \dots \\ \dots + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2}(1 + nC') + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1}(1 + nB') + (-1)^{n-1}$$

et de là

$$(n - 1)! = \left\{ n^{n-1} - nA + \binom{n-1}{2}nB - \binom{n-1}{3}nC + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2}nC' + \right. \\ \left. + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1}nB' \right\} + \left\{ (-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right\}.$$

Mais

$$(-1)^{n-1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots \\ + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} = \\ = \left\{ \binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} - \binom{n-1}{3} + \dots \right. \\ \left. + (-1)^{n-3} \binom{n-1}{2} + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} \right\} + \\ + n - 1 - 1 + (-1)^{n-1} = n - 2 + (-1)^{n-1},$$

puisque

$$\binom{n-1}{0} - \binom{n-1}{1} + \dots + (-1)^{n-2} \binom{n-1}{1} + (-1)^{n-1} = (1 - 1)^n = 0;$$

et aussi

$$(n - 1)! + 2 - (-1)^{n-1} = nP$$

avec P entier.

Pour $n > 2$ premier on a enfin la relation

$$(n - 1)! + 1 = nP.$$

Réciproquement si

$$(n - 1)! + 1 = nP ,$$

le nombre n est premier et l'on a aussi démontré le *théorème de Wilson*.

Ce théorème fut attribué à WILSON par WARING, mais on le doit à LAGRANGE.

Messine, 24 décembre 1928.

MOUVEMENT D'UN POINT DONT L'ACCÉLÉRATION
EST PARALLÈLE A UNE DROITE OU A UN PLAN
CONSTANTS

PAR

Letterio TOSCANO (à Messine).

Dans mon travail *Moto di un punto sollecitato da una forza la cui linea d'azione incontra una retta fissa*, sous presse dans le *Giornale di Matematiche*, nous traitons de manière complète et en appliquant la méthode vectorielle, un problème traité déjà par CERRUTI, DAINELLI, CESARO, GEBBIA, avec méthodes diverses qui conduisent à des calculs compliqués.

M. U. DAINELLI, dans un autre travail, *Sul movimento per una linea qualunque* (*Giornale di Matematiche*, vol. 18, 1880, pp. 271, 300), considère le mouvement d'un point dont l'accélération est parallèle à une droite ou à un plan constants; et ici nous reprenons le même problème pour le traiter par la méthode vectorielle.

1. — Mouvement d'un point dont l'accélération a une direction constante.

Soit P le point mobile et a un vecteur unitaire suivant la direction constante