BIBLIOGRAPHIE

Emile PICARD. — **Quelques applications analytiques de la Théorie des Courbes et des Surfaces algébriques.** Leçons rédigées par M. Jean Dieudonné (Cahiers scientifiques publiés sous la direction de M. Gaston Julia. Fascicule IX). — Un vol. gr. in-8° de VIII-224 pages et 11 figures. Prix : 50 francs. Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1931.

Ce volume est le quatrième, des « Cahiers Julia », que nous devons à M. Emile Picard. On sait que l'illustre géomètre semblait avoir renoncé à la publication du tome quatrième de son grand *Traité d'Analyse*, du moins sous la forme parfaite obtenue pour les trois premiers volumes. Nombreuses étaient les théories conservant encore des lacunes et des dissymétries s'opposant à une exposition méthodiquement enchaînée et cependant il était bien regrettable de ne pas avoir ces théories sous la forme actuelle incitant précisément au travail qui pourrait les compléter. Les cahiers créés par M. Julia sont intervenus ici avec le plus grand à-propos, le Maître nous livrant, par leur intermédiaire, de merveilleuses Leçons et ce, à l'époque, où des règlements par trop stricts l'éloignent d'une Chaire d'Analyse supérieure occupée avec un éclat qui fit toujours l'admiration du monde scientifique.

Le présent volume, s'il pose encore bien des problèmes, est cependant loin de manquer d'enchaînement. C'est presque un lieu commun de rappeler que, bien qu'il existe une théorie géométrique des courbes algébriques, ces courbes ne sont véritablement bien connues qu'avec les intégrales abéliennes y attachées et que l'intégrale abélienne elle-même n'est pas complètement étudiée si on la laisse en deçà du problème de l'inversion. Sur ce dernier point, on sait quelles pages ardues nous ont été léguées par Briot et plus récemment par Jordan. Est-ce l'effet de l'effort fait autrefois avec ces auteurs ou celui des habitudes riemanniennes si ancrées maintenant dans la Science ou tout simplement l'art d'exposition de M. Emile Picard, il semble bien, de toutes façons, que le sujet soit devenu relativement simple et les fonctions thêta tout-à-fait maniables, ne serait-ce que parce que l'on commence par l'intégrale de première espèce à partir du cas elliptique. Plus généralement les fonctions thêta sont toujours remarquables comme fonctions à multiplicateurs éliminables en de certains quotients et la suprême esthétique du théorème d'Abel donne, à ces aperçus sur les fonctions abéliennes, un cachet d'élégance qu'il semble bien difficile de surpasser. La méthode est d'ailleurs susceptible de variantes comprenant, par exemple, une brillante généralisation de l'équation différentielle d'Euler.

Les fonctions méromorphes quadruplement périodiques (Ch. II) prennent des caractères algébriques et même rationnels quand de certaines liaisons apparaissent dans la quadruple périodicité. Il y a encore là une brillante extension de lemmes elliptiques. Les méthodes de M. Picard conduisent de même (Ch. III) à retrouver la représentation paramétrique fuchsienne des courbes algébriques dévoilée par Henri Poincaré dans un ordre d'idées plutôt inverse en partant plus des propriétés uniformisantes de la fonction fuchsienne que de la nature même de la courbe.

En possession de la notion de fonction automorphe, nous pouvons y adjoindre (Ch. IV) de profondes généralités sur l'équation $\Delta u = ke^u$. Il y a là une des plus belles liaisons entre les surfaces à courbure totale constante sur lesquelles existe une géométrie non-euclidienne et cette dernière géométrie naturellement liée, d'autre part, au groupe fuchsien.

En trois derniers chapitres, M. Emile Picard passe aux surfaces algébriques et aux intégrales simples ou doubles qui peuvent y être attachées, en suivant, *autant que possible* l'ordre des résultats acquis avec les courbes. Mais on aperçoit promptement combien il est nécessaire de souligner les mots *autant que possible*. Les intégrales de différentielles totales sont naturellement accompagnées de conditions d'intégrabilité; les intégrales doubles peuvent prendre des formes *stokiennes* qui leur confèrent plutôt des propriétés d'intégrales simples. Dans de tels cas, le terrain devient d'une transcendance tout à fait nouvelle: des nombres entiers, à histoire déjà célèbre, s'attachent aux surfaces algébriques comme le *genre* s'attache aux courbes mais avec des difficultés arithmétiques insoupçonnables dans la théorie des intégrales abéliennes. C'est ici qu'apparaît un Analysis situs, une topologie appelant encore de nombreux perfectionnements tandis qu'en matière abélienne à une variable, la notion de surface de Riemann semble aujourd'hui définitive.

Quatre Notes, déjà publiées en 1903, 1905, 1889, 1883, terminent un exposé qui lie surtout le tome II du *Traité d'Analyse* aux *Fonctions algébriques de deux variables* de MM. Picard et Simart. Ce lien semble particulièrement heureux et presque susceptible d'être étudié sans étude développée des ouvrages qu'il unit. On se reportera à ceux-ci là ou M. Picard indique la nécessité du rapprochement. Et avant de fouiller, par un travail persévérant, le détail logique des choses, ces nouvelles Leçons permettront un premier coup d'œil d'ensemble d'où sortiront aisément d'utiles et profondes intuitions.

A. Buhl (Toulouse).

Alexander Ostrowski. — **Studien über den Schottkyschen Satz.** — Un volume gr. in-8° de IV-112 pages. Prix: 5 francs suisses. B. Wepf & Cie, Bâle, 1931.

Cette analyse nous paraît devoir être placée, ici, immédiatement après celle consacrée aux dernières Leçons de M. Emile Picard. Les sujets ne sont pas les mêmes mais ils dépendent du même animateur. Il s'agit du théorème que M. Picard nous donna, voici un demi-siècle, sur les valeurs qu'une fonction entière ne peut pas prendre, en un Mémoire célèbre reproduit récemment en tête de *Selecta* (voir *L'Enseignement mathématique*, t. 27, 1928, pp. 11 et 155). Depuis cinquante ans, ce théorème a eu de prodigieuses répercussions. On a voulu l'approfondir, le rendre indépendant de la fonction modulaire, le généraliser d'une foule de manières et le lemme de Schottky représente assez bien aujourd'hui l'aboutissement de ces vastes efforts qui, entre temps, ont été l'objet de nombre d'expositions systématiques, telles celles de la *Collection de Monographies sur la Théorie des Fonctions* publiée par M. Emile Borel. Si nous disons « assez bien », ce n'est pas pour critiquer,