Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1931)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE ET TOPOLOGIE

Autor: Hopf, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-23890

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE ET TOPOLOGIE[1]

PAR

H. Hopf (Zurich).

Le titre de cette conférence ne désigne qu'imparfaitement son contenu. Car de tous les domaines variés où la géométrie infinitésimale se rencontre avec la topologie, un seul sera considéré ici: le problème *des rapports entre les propriétés infinitésimales d'une surface, d'une part, et la structure topologique de la surface entière, d'autre part*, ainsi que le problème analogue pour les variétés à plusieurs dimensions. Il s'agit là de surfaces (ou de variétés) sans singularités, sur lesquelles une géométrie se trouve définie d'une manière intrinsèque, au sens de Riemann; les paramètres et les coefficients de la forme fondamentale sont supposés admettre un prolongement analytique régulier de proche en proche. Un tel être géométrique a deux catégories de propriétés: en premier lieu des propriétés topologiques se rapportant à la structure globale, par exemple la propriété d'être ouvert ou fermé, d'avoir tel genre, etc.; en second lieu des propriétés infinitésimales déterminées par la forme fondamentale de Riemann, en rapport avec la courbure, l'allure des lignes géodésiques, etc. On demande: « quels liens y a-t-il entre les propriétés de ces deux catégories ? » En fait, il y a bien une interdépendance et des liens. On peut envisager une question principale, que nous appellerons « le problème du prolongement »: étant donné un petit morceau découpé dans une surface, tirer des propriétés infinitésimales de ce morceau des conclusions

[1] Conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse tenue à Fribourg le 3 mai 1931, traduite par G. de Rham, Dr ès sc. (Lausanne).

aussi complètes que possible sur la structure topologique de la surface entière d'où provient ce morceau.

Avant d'entreprendre ces recherches, comme avant toute étude de géométrie globale, il faut éclaircir le point suivant: « qu'est-ce qu'une surface *entière* ? » En effet, un domaine partiel d'une surface avec une géométrie infinitésimale sans singularités est encore une telle surface, mais ces domaines partiels doivent être naturellement exclus. Il s'est trouvé commode d'adopter la définition suivante: « une surface est dite *complète*, si, sur tout rayon géodésique, on peut reporter à partir de son origine une longueur quelconque », et de mettre ces surfaces « complètes » à la base de nos recherches; on démontre qu'une surface est complète si elle admet le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS et dans ce cas seulement, c'est-à-dire si, sur elle, tout ensemble fermé et borné est compact; cette notion de « complet » se confond d'ailleurs avec celle de FRÉCHET-HAUSDORFF. Voici une propriété importante des surfaces complètes: entre deux points, il y a toujours un chemin (géodésique) de longueur minimale (I) [1]. Dans la suite, toutes les surfaces seront supposées complètes.

Notre position du problème remonte à Felix KLEIN; il posa et résolut la plus simple de ces questions; il étudia en effet les surfaces *à courbure constante*, qu'il dénomma « formes spatiales » euclidiennes et non-euclidiennes. Les principaux résultats de ce « problème spatial de CLIFFORD-KLEIN » consistent en les trois théorèmes suivants:

A. *Il n'existe essentiellement qu'une surface simplement connexe ayant une courbure constante donnée;* (sphère, plan euclidien, plan hyperbolique).

B. *Parmi toutes les surfaces orientables fermées de genre* p, *seules les formes spatiales de genre* $p = 0$ *peuvent avoir une courbure positive, seules celles de genre* $p = 1$ *peuvent avoir une courbure nulle et seules celles de genre* $p > 1$ *peuvent avoir une courbure négative;* en d'autres termes: *la courbure d'une forme spatiale a le même signe que la caractéristique eulérienne* $2 - 2p$ *de la surface.*

[1] Les chiffres romains renvoient à l'index bibliographique, à la fin du rapport.

C. *Une forme spatiale à courbure positive est toujours fermée* (homéomorphe en effet à la sphère ou au plan projectif) (II, III, IV).

Nous demanderons maintenant dans quelle mesure ces théorèmes, qui constituent évidemment une importante contribution à notre programme de recherches, peuvent être étendus au cas des surfaces à courbure non constante.

Commençons par le théorème C. Est-ce que toute surface à courbure positive doit être fermée ? Non, car, par exemple, par la rotation d'une parabole autour de son axe, on obtient une surface (complète) ouverte, à courbure partout positive. Pourtant le théorème C peut être généralisé; nous n'avons qu'à supposer la courbure partout supérieure à une constante positive; un raisonnement de BONNET (V), modifié en utilisant le fait que la surface est complète, nous apprend qu'elle est *fermée* (I).

On peut même dire plus: comme dans le cas de courbure positive constante, la surface doit être encore homéomorphe à la sphère ou au plan projectif. Cela résulte immédiatement du théorème connu de la *curvatura integra* d'une surface fermée, qui, en se bornant aux surfaces orientables, s'énonce ainsi: *l'intégrale de la courbure de Gauss, étendue à une surface fermée de genre* p, *vaut* $4\pi(1-p)$. Ce théorème étend aux surfaces à courbure non constante l'affirmation contenue dans le théorème B; au lieu de la courbure auparavant constante, c'est la valeur moyenne de la courbure qui intervient maintenant; elle a le même signe que la caractéristique de la surface (VI).

Ces deux théorèmes — tant celui qui remonte à BONNET que celui de la *curvatura integra* — fournissent d'importants renseignements sur la structure de la surface, en admettant qu'on connaisse ses propriétés infinitésimales *en chaque point;* mais le « problème du prolongement », formulé au début, exige qu'on tire de tels renseignements de la connaissance des propriétés infinitésimales dans le voisinage *d'un seul point.* Dans cette direction, de très importants et réjouissants progrès ont été réalisés tout récemment par M. RINOW; je vais en rendre compte maintenant (VII).

Si un « morceau » ou « élément » de surface peut être prolongé, d'une manière ou d'une autre, en une surface complète F, il peut aussi être prolongé en une surface simplement connexe, à savoir la surface universelle de recouvrement de F; les connaissances acquises à l'occasion du problème spatial de CLIFFORD-KLEIN suggèrent l'idée de rechercher en premier lieu ces prolongements simplement connexes d'un élément. Le « théorème d'unicité » démontré par M. RINOW, dans lequel on peut voir une généralisation du théorème A formulé ci-dessus, s'énonce ainsi: *Un élément de surface ne peut être prolongé qu'en au plus une surface simplement connexe.* D'ailleurs, une surface simplement connexe est ou bien fermée et homéomorphe à la sphère, ou bien ouverte et homéomorphe au plan; il en résulte qu'un morceau de surface, pourvu seulement qu'il soit prolongeable en une surface complète ou, dans les termes employés ci-dessus, provienne d'une surface complète, porte a priori en lui-même la propriété d'être ouverte ou fermée dont jouit la surface universelle de recouvrement de ses prolongements complets. Cela implique par exemple le fait suivant: *un morceau d'une surface fermée de genre* 0 *ne peut jamais être isométrique à un morceau d'une surface ouverte ou d'une surface fermée de genre supérieur.* Avec cela, le théorème B est en partie généralisé au cas des surfaces fermées (orientables); la question surgit de savoir si la généralisation de B peut être poussée jusqu'à l'énoncé suivant: *un morceau d'une surface fermée orientable de genre* 1 *n'est jamais isométrique à un morceau d'une surface fermée de genre* $p > 1$. En ce qui concerne la possibilité de démontrer ce théorème, qui devrait conduire — par analogie avec les méthodes éprouvées sur le problème des formes spatiales — à l'étude du groupe d'isométrie d'une surface simplement connexe, je suis assez optimiste [1]. Ces théorèmes constituent évidemment une puissante contribution à la solution de notre problème.

Si nous nous bornons aux prolongements simplement connexes d'un élément, le théorème d'unicité de M. RINOW conduit nécessairement à la remarque et à la question suivantes. Un élément E étant donné, il y a trois possibilités qui s'excluent mutuellement: 1° E ne peut pas être prolongé en une surface complète; 2° E peut être prolongé en une surface du type topo-

[1] Depuis lors, le théorème a été démontré par M. RINOW, en collaboration avec l'auteur (XI). [*Note additionnelle.*]

logique du plan; 3° E peut être prolongé en une surface du type topologique de la sphère. *Comment peut-on reconnaître, sur l'élément* E, *lequel des trois cas se présente ?* Nous admettrons ici que nous sommes en état de surmonter toutes les difficultés analytiques qui peuvent intervenir dans l'étude de la métrique de E. Bien que nous soyons encore fort éloignés d'une solution quelque peu complète de ce problème, les contributions fournies ici aussi par M. Rinow sont cependant assez intéressantes:

Concevons l'élément E comme le voisinage d'un point a d'une surface, sur laquelle nous introduisons des coordonnées polaires géodésiques r et φ; l'élément linéaire prend alors la forme $ds^2 = dr^2 + G(r, \varphi)\, d\varphi^2$, où G remplit quelques conditions simples connues. Tout d'abord, il est aisé de voir que, si l'élément appartient à une surface complète, G ne peut avoir aucune singularité (réelle); par suite, pour ne pas nous trouver avec certitude dès l'abord dans le cas 1°, nous supposerons que G est régulière pour tous r et φ réels. Ensuite, il convient de répartir en deux classes les fonctions régulières G en question: *a*) pour tout $r > 0$, on a $G \neq 0$; *b*) G possède des zéros (réels) avec $r > 0$. La signification géométrique des zéros de G est connue: ce sont les points conjugués de a. Il est maintenant très facile de prouver que, *dans l'hypothèse* a), *se présente toujours le cas* 2°, *jamais l'un des cas* 1° *ou* 3°. Notre question reste difficile et intéressante, lorsque l'hypothèse *b*) est réalisée; voici le fait connu le plus important: *chacun des cas* 1°, 2°, 3° *peut se présenter; en particulier, il peut donc arriver, même si* G *est régulière dans tout le domaine réel, que l'élément* E *ne puisse pas être prolongé en une surface complète;* cela me semble indiquer que notre problème géométrique du prolongement n'est pas réductible sans autre à un prolongement purement analytique. Sur la question de savoir à quoi l'on peut reconnaître lequel des trois cas se présente, on n'a jusqu'ici que ce résultat incomplet: *si à tout* φ *correspond un* r *positif, tel que* G *s'annule, alors le cas* 2° *ne se présente certainement pas.* Je considère qu'un problème important et intéressant consiste à poursuivre ces recherches de M. Rinow.

Il reste encore à examiner dans quelle mesure les théorèmes discutés jusqu'ici peuvent être étendus aux variétés à plusieurs dimensions; pour la physique aussi, il y aurait peut-être intérêt à savoir ce qu'on peut dire sur la structure topologique d'une variété à trois ou quatre dimensions lorsqu'on connaît ses propriétés métriques locales.

Il faut dire tout d'abord, au sujet des « formes spatiales » euclidiennes et non euclidiennes, c'est-à-dire des espaces à courbure constante, que les théorèmes A et C formulés ci-dessus sont encore valables pour plus de deux dimensions, avec une petite modification du théorème C: pour un nombre impair de dimensions, outre les espaces sphérique et projectif, d'autres variétés peuvent encore se présenter comme formes spatiales à courbure positive; mais ces variétés sont aussi toutes fermées, ce qui est l'essentiel pour le théorème C (III). Par contre, le théorème B n'a été jusqu'ici étendu au cas de plusieurs dimensions que d'une manière incomplète; à la base des essais d'une telle extension, on posera cette question: *peut-on faire d'une même variété fermée à* n *dimensions, en introduisant deux métriques différentes, deux formes spatiales à courbures de signes différents ?* On ne sait jusqu'à présent que ceci: *si* n *est pair, la réponse est négative* (VIII); par contre, lorsque le nombre n des dimensions est impair, on ne sait pas s'il peut arriver qu'une même variété puisse se présenter à la fois comme forme spatiale euclidienne et comme forme spatiale hyperbolique. C'est là un problème intéressant, qui mène à l'étude des groupes de déplacements non euclidiens [1]. Pour n pair, il subsiste d'ailleurs encore dans le cas $n > 2$ un lien important entre le signe de la courbure et celui de la caractéristique eulérienne de la variété (VIII).

On n'a pas encore recherché si le théorème de Bonnet, sur la propriété qu'ont les surfaces à courbure positive d'être fermées, peut être généralisé au cas de plusieurs dimensions [2], et

---

[1] MM. Seifert et Threlfall à Dresde m'ont communiqué récemment qu'on doit répondre par la négative à la question ci-dessus, pour toutes les valeurs de n. Leur démonstration est très courte: elle utilise des propriétés simples des mouvements hyperboliques, et ramène la question à un théorème important de M. Bieberbach sur les groupes de mouvements euclidiens (*Math. Annalen*, 70) [*Note additionnelle.*]

[2] Dans la discussion, M. Gonseth a rendu attentif à l'existence, dans cette direction, de quelques nouveaux théorèmes de M. Cartan; les expaces $\mathcal{E}$, dont il s'agit, occupent une place intermédiaire entre les espaces à courbure constante et ceux dont la courbure est quelconque (IX).

l'extension du théorème de la *curvatura integra* n'a réussi que dans deux cas très particuliers. Je viens justement de vous exposer l'un d'eux: c'est le cas où la courbure est constante; la *curvatura integra* est alors essentiellement le *volume* de la forme spatiale, et c'est sur la considération de ce volume que repose le théorème sur les signes de la courbure et de la caractéristique, auquel on vient de faire allusion, théorème qui entraîne l'extension de B aux nombres pairs de dimensions (VIII). L'autre cas particulier où le théorème de la *curvatura integra* peut être étendu aux variétés à n dimensions se présente lorsque les variétés sont *des hypersurfaces situées dans l'espace euclidien à* n + 1 *dimensions; pour* n *pair, on a alors ce théorème: la curvatura integra est égale au produit de la demi-caractéristique de la variété par l'étendue superficielle de la sphère unité à* n *dimensions* — tout comme pour $n = 2$; la courbure de l'hypersurface doit être définie ici suivant GAUSS, au moyen de la représentation sphérique par les normales. Si n est impair, cette affirmation n'est en général pas exacte, circonstance qui soulève tout naturellement de nouvelles questions (X). Qu'adviendra-t-il de la *curvatura integra* d'une variété à plusieurs dimensions qui ne rentre dans aucun des deux cas examinés ? Ce me semble être un problème particulièrement important et intéressant, d'ailleurs difficile aussi; si l'on songe aux démonstrations habituelles pour deux dimensions, cela devrait revenir à une généralisation de la célèbre formule de GAUSS-BONNET [1].

Enfin, on n'a pas encore cherché si les théorèmes de M. RINOW peuvent être étendus à plusieurs dimensions; pour le théorème d'unicité en particulier, cela ne doit pourtant guère présenter de difficultés.

BIBLIOGRAPHIE

(I). H. HOPF und W. RINOW, Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche. *Commentarii Math. Helvetici*, vol. 3 (1931).

(II). F. KLEIN, Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. *Math. Annalen*, 37 (1890).

[1] Pour une telle généralisation dans le cas particulier de courbure constante, consulter le travail (VIII); une formule de POINCARÉ y joue le rôle de la formule de GAUSS-BONNET. D'ailleurs, comme M. KOLLROS l'a signalé pendant la discussion, cette formule de POINCARÉ se trouve déjà chez SCHLÄFLI.

(III). H. HOPF, Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem. *Math. Annalen*, 95 (1925).
(IV). P. KOEBE, Riemannsche Mannigfaltigkeiten und nichteuklidische Raumformen (1. Mitteilung). *Sitzungsber. Akad. d. Wissensch. Berlin*, 1927.
(V). Cf.: W. BLASCHKE, *Differentialgeometrie*, I (Berlin, 1921), § 84.
(VI). Cf.: BLASCHKE, *l. c.*, § 64.
(VII). W. RINOW, Ueber Zusammenhänge zwischen der Differentialgeometrie im Grossen und im Kleinen; Dissertation Berlin 1931, *Math. Zeitschrift* (sous presse).
(VIII). H. HOPF, Die Curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen. *Nachr. d. Gesellsch. d. Wissensch.*, Göttingen, 1925.
(IX). E. CARTAN, La géométrie des groupes simples. *Annali di Mat.* (4), 4 (1927).
(X). H. HOPF, Ueber die Curvatura integra geschlossener Hyperflächen *Math. Annalen*, 95 (1925); Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Annalen*, 96 (1926).
(XI). W. RINOW, Ueber Flächen mit Verschiebungselementen; H. HOPF und W. RINOW, Die topologischen Gestalten differentialgeometrisch verwandter Flächen; *Math. Annalen* (sous presse).

SUR LES FAMILLES CROISSANTES DE SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE DÉNOMBRABLE

PAR

W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

Une famille F d'ensembles est dite *croissante*, si de deux ensembles de la famille F un est toujours une partie aliquote de l'autre. Une telle famille peut être ordonnée d'après la grandeur des ensembles qui la constituent, c'est-à-dire de deux ensembles de la famille F celui est regardé comme précédent qui est la partie aliquote de l'autre. A toute famille croissante d'ensembles correspond ainsi un type d'ordre [1].

---

[1] En ce qui concerne les types d'ordre, voir par exemple mon livre *Leçons sur les nombres transfinis*, chap. VII. Paris, Gauthier-Villars, 1928.