

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LA STRUCTURE DES TRANSFORMATIONS TOPOLOGIQUES  
DES SURFACES EN ELLES-MÊMES  
**Autor:** de Kerékjártó, B.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27318>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# CONFÉRENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE <sup>1</sup>

(suite)

---

## SUR LA STRUCTURE DES TRANSFORMATIONS TOPOLOGIQUES DES SURFACES EN ELLES-MÊMES <sup>2</sup>

PAR

B. DE KERÉKJÁRTÓ (Szeged, Hongrie).

---

1. — *Généralités.* — Le problème fondamental de la topologie est de déterminer les conditions sous lesquelles deux configurations sont homéomorphes; l'homéomorphie des deux configurations sera établie par le moyen d'une transformation topologique (c'est-à-dire biunivoque et bicontinue). Ce problème est résolu pour les cas des lignes et des surfaces; grâce à ces résultats, on peut approfondir les recherches concernant les transformations des surfaces. Alors, les transformations ne seront plus considérées comme les seuls moyens qui servent à établir l'homéomorphie de deux surfaces, mais elles deviennent des êtres autonomes dont la topologie ouvre un champ important de recherches nouvelles. Il s'agit dans ces recherches — comme en toute question d'homéomorphie — de trouver des propriétés topologiques des transformations.

Une partie considérable de ces problèmes — d'une nature plutôt combinatoire — concerne la détermination des points

---

<sup>1</sup> Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 21 au 25 octobre 1935, sous la présidence de M. Elie CARTAN, Membre de l'Institut.

<sup>2</sup> Conférence faite le 23 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie.*

invariants, leurs classes et leurs indices. Après les résultats classiques de MM. BROUWER, BIRKHOFF et ALEXANDER, c'est M. J. NIELSEN qui a réussi à développer une théorie systématique de cette catégorie de problèmes par des méthodes remarquables par leur élégance et leur profondeur [31]<sup>1</sup>.

Une autre partie beaucoup moins développée concerne la structure des transformations; nous essayons de donner dans la suite un résumé des problèmes et des résultats concernant la structure des transformations topologiques, et de signaler leurs relations avec d'autres questions de mathématiques. Nous faisons observer que les recherches profondes de MM. BIRKHOFF et P. SMITH [2, 7], importantes par leurs applications dynamiques, concernent surtout des transformations analytiques. Pour cette raison elles n'entrent pas dans le cadre de notre conférence.

2. — *Homéomorphie de deux transformations.* — Soient  $S$  et  $S'$  deux surfaces homéomorphes, et soient  $T$  et  $T'$  des transformations topologiques de ces surfaces en elles-mêmes. Les transformations  $T$  et  $T'$  seront dites *homéomorphes* s'il existe une transformation topologique  $\tau$  de  $S$  en  $S'$  telle que  $T'$  est la transformée de  $T$  par  $\tau$ :

$$T' = \tau^{-1} T \tau .$$

Toutes les transformations topologiques homéomorphes entre elles forment un seul *type topologique* de transformations.

Le problème idéal est de reconnaître les conditions sous lesquelles deux transformations sont homéomorphes. Comme ce problème ne pourra pas être résolu dans sa généralité, on cherchera à déterminer des propriétés caractéristiques qui sont alors communes à toutes les transformations appartenant au même type topologique. L'ensemble, les classes et les indices des points invariants sont des caractéristiques; en voici encore quelques autres: la propriété d'une transformation d'appartenir à un groupe continu ou discontinu de transformations, d'admettre une racine carrée, d'être périodique de période  $n$ ,

---

<sup>1</sup> Les numéros entre crochets renvoient à la liste bibliographique placée à la fin du Mémoire.

etc.; la propriété d'une transformation que les images successives d'un point (obtenues par l'itération indéfinie de la transformation et de son inverse) convergent vers un seul point, ou qu'elles admettent des points d'accumulation dont l'ensemble possède une structure donnée, ou bien qu'elles forment un ensemble partout dense sur la surface.

D'une façon analogue, nous définissons l'homéomorphie de deux ensembles de transformations  $(T)$  et  $(T')$  dont l'un comprend des transformations  $T$  de la surface  $S$  en elle-même, l'autre des transformations  $T'$  de  $S'$  en elle-même; les deux ensembles seront dits homéomorphes, s'il existe *une* transformation topologique  $\tau$  de la surface  $S$  en  $S'$  telle que les éléments de  $(T')$  soient les transformés des éléments de  $(T)$  par  $\tau$ . Cette définition s'applique, en particulier, si  $(T)$  et  $(T')$  sont des *groupes*, et alors leur homéomorphie entraîne leur isomorphie holoédrique. Si les ensembles  $(T)$  et  $(T')$  sont homéomorphes, toute transformation  $T$  est homéomorphe à une transformation  $T'$ , et vice versa. Mais on peut construire des exemples simples montrant que l'homéomorphie de chacune des transformations  $(T)$  avec une transformation de  $(T')$  n'entraîne pas l'homéomorphie des ensembles  $(T)$  et  $(T')$  parce que la transformation  $\tau$  établissant l'homéomorphie entre deux éléments correspondants  $T$  et  $T'$  n'est pas la même pour tout  $T$ .

3. — *Représentations conformes.* — Bien que le problème d'homéomorphie de deux transformations ne puisse pas être résolu généralement, on peut chercher des conditions de nature topologique sous lesquelles une transformation est homéomorphe à une transformation donnée de structure simple. M. BROUWER [8] a posé le problème de caractériser topologiquement les représentations conformes, c'est-à-dire de déterminer les conditions sous lesquelles une transformation est homéomorphe à une représentation conforme. Nous traiterons ce problème plus loin; ici nous le mentionnons seulement pour expliquer et justifier nos définitions.

Si  $S'$  est une surface analytique, et si  $T'$  est une représentation conforme de  $S'$  en elle-même, l'homéomorphie entre  $T$  et  $T'$  permet de considérer aussi  $T$  comme une représentation conforme.



Nous transportons, en effet, la métrique de  $S'$ , c'est-à-dire les angles et les distances définies en  $S'$ , sur la surface  $S$ , au moyen de la transformation  $\tau$  qui établit l'homéomorphie entre  $T$  et  $T'$ . La transformation  $T$  de  $S$  en elle-même est alors une représentation conforme par rapport à cette métrique de  $S$ . On reconnaît facilement que la propriété d'une transformation d'être homéomorphe à une représentation conforme est très restrictive; par exemple, une transformation de  $S$  en elle-même, différente de l'identité, qui laisse invariants tous les points d'un domaine sur  $S$  ne peut être conforme dans aucune métrique.

Ici on voit immédiatement quelles raisons nous ont obligé à restreindre la définition de l'homéomorphie de deux transformations au cas des transformations des surfaces *en elles-mêmes*. Car si  $T$  est une transformation topologique quelconque d'une surface  $S$  en une autre surface  $S_1$  (sans point commun avec  $S$ ), on peut la considérer comme une représentation conforme de  $S$  sur  $S_1$ ; par la transformation  $T$  elle-même, nous transportons une métrique de  $S$ , choisie arbitrairement, sur la surface  $S_1$  et par cela  $T$  devient une représentation conforme de  $S$  sur  $S_1$ . Le caractère topologique des représentations conformes et biunivoques n'a donc un sens que s'il est restreint au cas des transformations des surfaces *en elles-mêmes*.

En ce qui concerne les représentations conformes et non biunivoques, il faut aussi dire que la détermination de leurs caractères au point de vue topologique pour le cas des transformations *entre deux surfaces distinctes* est complètement résolue par les surfaces de Riemann et leurs théorèmes d'existence. Mais le problème de caractériser topologiquement les transformations des surfaces *en elles-mêmes* qui sont homéomorphes à des représentations conformes, est complètement en suspens. Considérons, par exemple, la question la plus simple suivante: une transformation  $(1, n)$  de la sphère en elle-même, sous quelles conditions est-elle homéomorphe à une transformation rationnelle [établie par une fonction rationnelle  $w = R(z)$ ] ? La condition que la transformation soit localement biunivoque, excepté en un nombre fini de points, est évidemment nécessaire; s'il s'agit d'une transformation entre deux sphères distinctes, elle est aussi suffisante, mais non pas pour une transformation

d'une sphère en elle-même. Les recherches de M. JULIA [13] sur l'itération des fonctions rationnelles ont révélé beaucoup de propriétés topologiques de ces transformations; elles sont aussi fondamentales pour attaquer la question posée ci-dessus.

4. — *Domaine de la transformation.* — Pour la recherche de la structure d'une transformation topologique T qui transforme une surface S en elle-même, c'est un moyen utile de considérer les *domaines libres* et, en particulier, les domaines libres maxima. On entend par un domaine libre un domaine qui n'a aucun point commun avec son image; il est appelé maximum s'il n'est pas un vrai sous-ensemble d'aucun domaine libre. Il faut dire tout d'abord que l'existence seule d'un domaine libre maximum ne signifie rien, c'est un fait presque évident pour une transformation quelconque; c'est le type ou la forme d'un tel domaine et sa situation sur la surface qui sont souvent importants et même caractéristiques jusqu'à un certain degré.

Si P est un point quelconque de S non invariant dans la transformation T, il existe un voisinage de P qui n'a aucun point commun avec son image, ce voisinage est donc un domaine libre. En l'augmentant, on peut obtenir un domaine libre maximum. Ce fait qu'il est devenu maximum peut être dû à deux circonstances tout à fait différentes; ou bien la propriété du domaine d'être libre maximum exprime une propriété concernant la structure de la transformation; ou bien une constitution singulière de la frontière du domaine empêche d'augmenter le domaine libre. Voici un exemple qui montre la seconde possibilité; pour la translation  $x' = x + 1$ ,  $y' = y$ , le domaine limité par les lignes:

$$y = \pm 1, \quad -1 \leq x \leq +1,$$

$$x = \pm \frac{1}{2} + \frac{y}{2} \sin \frac{1}{1 - |y|}, \quad -1 < y < +1 \quad (l_1 \text{ et } l_2)$$

forme un domaine libre maximum (fig. 1); le fait qu'il est maximum est dû à la présence des continus de condensation à la frontière (les segments  $y = \pm 1$ ,  $-1 \leq x \leq +1$  sont des continus de condensation des lignes  $l_1$  et  $l_2$ ).

Pour éviter l'inconvénient signalé par cet exemple, nous ne considérerons dans la suite que les domaines libres maxima dont les frontières sont formées par des courbes d'ordre fini dans tout point et telles que les points d'ordre  $> 2$  forment un ensemble isolé. Nous appelons un domaine de cette sorte un *domaine de la transformation*. Pour une surface close il est un domaine limité par un nombre fini de courbes simples et fermées dont deux quelconques n'ont au plus qu'un nombre fini de points communs.

Pour assurer l'existence d'un domaine de la transformation, il faut restreindre la catégorie des transformations envisagées ;

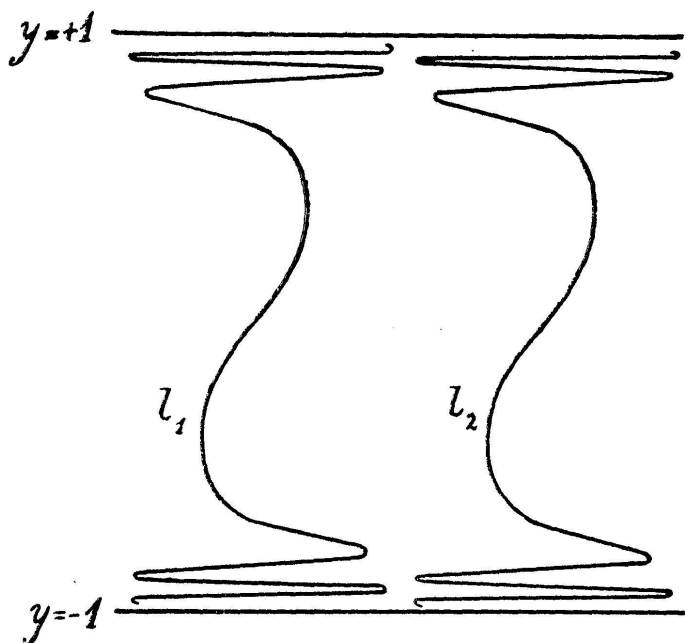


Fig. 1.

nous supposons dans la suite que  $S$  est une surface orientable à connexion finie, et  $T$  est une transformation à points invariants isolés. En particulier, nous considérerons les surfaces closes, et leurs transformations à un nombre fini de points invariants.

Le domaine de la transformation est l'analogie, dans un certain sens, du domaine fondamental correspondant à un groupe automorphe. Il n'est pas exactement déterminé par la transformation, on peut le modifier de maintes façons. Si  $P$  est un point quelconque sur la frontière du domaine, son image directe ou inverse appartient aussi à la frontière. Si  $P$  est un point de la frontière dont l'image directe appartient à la fron-

tière, et dont l'image inverse n'appartient pas à la frontière, si, de plus,  $P$  est un point d'ordre 2 de la frontière, c'est-à-dire si le voisinage de  $P$  sur la frontière est formé par un arc simple, l'image directe de cet arc appartient aussi à la frontière du domaine. On peut alors remplacer le premier arc par un arc voisin intérieur au domaine, et l'autre par l'image directe de celui-ci; par cette modification de la frontière, on a obtenu un autre domaine de la transformation. Un point invariant de la transformation peut appartenir à la frontière du domaine de la transformation, mais non pas à son intérieur.

Concernant le domaine de la transformation, les données suivantes sont caractéristiques: le nombre de ses contours, son nombre de connexion, le nombre des points invariants appartenant à sa frontière et le nombre des domaines complémentaires sur la surface. Sur une surface à connexion finie, le domaine de la transformation peut avoir un ou deux domaines complémentaires; dans le deuxième cas, il a précisément deux contours.

Nous faisons remarquer que la même transformation peut admettre deux domaines de la transformation de types différents. Tel est le cas pour une transformation linéaire hyperbolique de la sphère:  $z' = 2z$ . Un domaine de la transformation est formé par la couronne limitée par les deux circonférences concentriques  $|z| = 1$  et  $|z| = 2$ ; un domaine de type différent est limité par les spirales:

$$\log |z| = \operatorname{arc} z \quad \text{et} \quad \log |z| = \operatorname{arc} z + \log 2 ;$$

ce dernier domaine est à connexion simple, sur son seul contour il y a deux points invariants (fig. 2). Pour une transformation linéaire elliptique, le seul type du domaine de la transformation est limité par deux arcs simples joignant les deux points invariants, l'un de ces arcs étant l'image de l'autre.

5. — *Théorème de translation.* — Le théorème de translation dû à M. BROUWER [9] énonce la propriété suivante d'importance principale: Pour une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens et n'admettant pas de point invariant, il existe un domaine de la transformation limité par deux

lignes simples et ouvertes. On entend par une ligne simple et ouverte un ensemble fermé qui est une image topologique de la ligne droite. Si on projette le plan stéréographiquement sur une

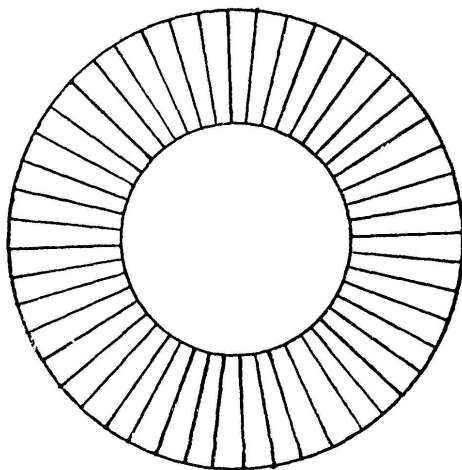


Fig. 2 a.

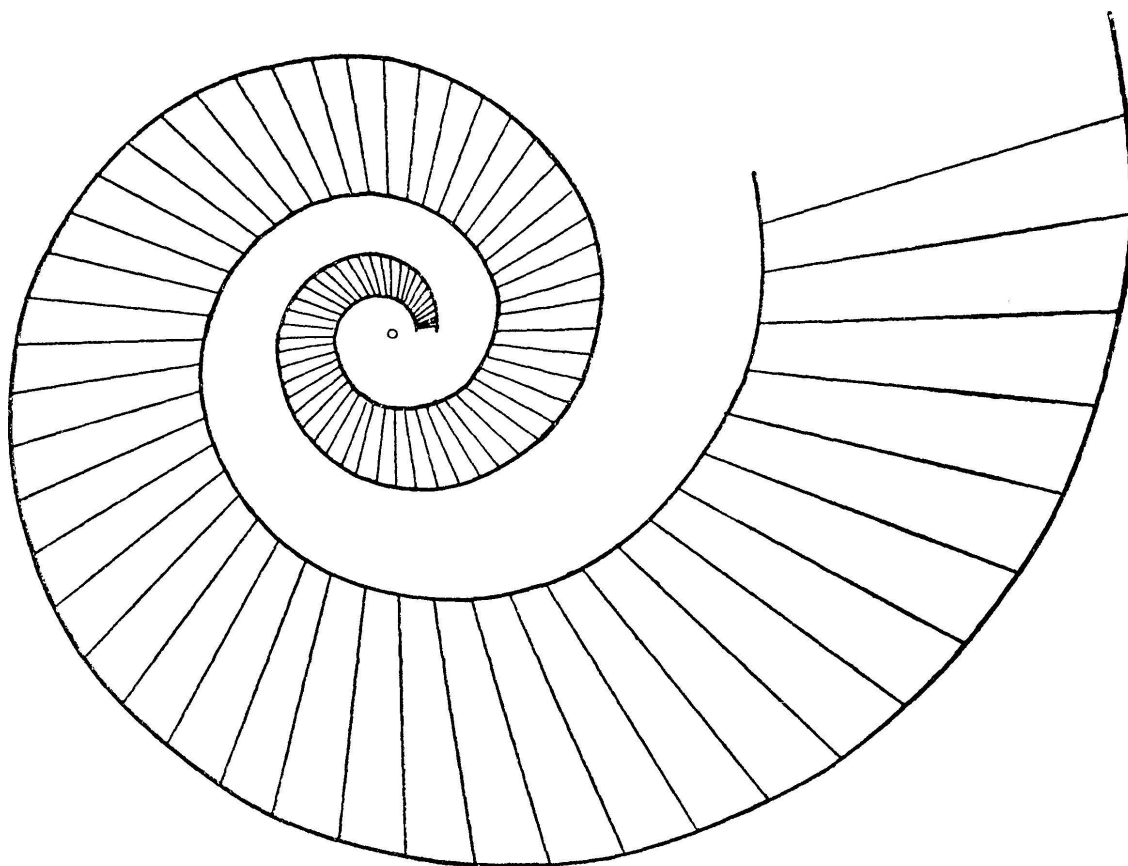


Fig. 2 b.

sphère, à la transformation donnée du plan correspond une transformation de la sphère en elle-même à un seul point inva-

riant; aux lignes simples et ouvertes limitant le domaine de la transformation correspondent des courbes simples et fermées passant par le point invariant qui n'ont pas d'autres points communs; l'une de ces courbes est l'image de l'autre dans la transformation donnée.

*Remarque.* — Comme cette conférence ne nous permet pas de nous occuper des démonstrations, je rappelle que dans deux notes aux *Comptes rendus* j'ai esquissé, et dans un mémoire aux *Acta Scient. Math.* de Szeged j'ai développé une méthode systématique qui nous met en état de démontrer, par une construction simple, à la fois le théorème de translation et le dernier théorème de POINCARÉ (voir note 6) [15, 16, 17]. Si on se borne à démontrer le théorème de translation, on peut éviter la modification de ma construction que j'ai appelée la *déviations de la ligne construite*. La construction nous fournit alors une ligne brisée composée de segments perpendiculaires dont les sommets forment une suite divergente. Si elle n'est pas un ensemble fermé, ses points d'accumulation n'appartenant pas à la ligne forment une ou deux *lignes droites invariantes* dans la transformation. Il ne peut exister deux droites invariantes de directions distinctes, car leur point commun serait un point invariant dans la transformation. En recommençant notre construction à partir d'un segment qui n'est ni parallèle, ni perpendiculaire à la direction des droites invariantes, notre construction fournit automatiquement une ligne simple et ouverte qui n'a pas de point commun avec son image; cette ligne et son image limitent un domaine de la transformation.

6. — *Le dernier théorème géométrique de Poincaré.* — Un autre résultat classique concernant la structure des transformations est le théorème suivant énoncé par POINCARÉ [32] et démontré pour la première fois par M. BIRKHOFF [1, 3]: Soit  $S$  une couronne limitée par deux circonférences concentriques  $C_1$  et  $C_2$ ; soit  $T$  une transformation topologique de  $S$  en elle-même qui transforme chacune des circonférences  $C_1$  et  $C_2$  en elle-même et déplace leurs points en des sens opposés. Si la transformation  $T$  n'admet pas de point invariant, il y a une courbe simple et fermée qui se trouve à l'intérieur de son image directe ou inverse.



Nous indiquons la relation entre ce théorème et le théorème de translation. Soient  $(r, \varphi)$  des coordonnées polaires dans la couronne  $1 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , et soit la transformation  $T$  exprimée par les formules  $r' = R(r, \varphi)$ ,  $\varphi' = \theta(r, \varphi)$ ; déterminons la valeur de  $\theta(r, \varphi)$  pour un point de  $C_1$  de telle façon que  $\varphi < \theta(1, \varphi) < \varphi + 2\pi$ ; pour les points de  $C_2$ , on aura alors  $\theta(2, \varphi) < \varphi$ ; c'est l'expression de la condition que  $T$  déplace les points de  $C_1$  et de  $C_2$  en des sens opposés. Nous transformons la couronne par les formules  $y = r$ ,  $x = \varphi + 2k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) sur la bande  $1 \leq y \leq 2$ ,  $-\infty < x < +\infty$  dans le plan cartésien  $(x, y)$ , et nous étendons la transformation de cette bande en elle-même correspondant à  $T$  sur le plan entier pour obtenir une transformation sans point invariant du plan en lui-même. Le théorème de translation assure l'existence d'un domaine de la transformation dans le plan; pour démontrer le théorème de POINCARÉ, il faut trouver un domaine de la transformation dans la bande qui est périodique en  $x$  de période  $2\pi$ . Ma méthode mentionnée ci-dessus permet de construire un domaine de cette sorte [16, 17].

D'une façon similaire, on peut ramener toute transformation  $T$ , d'une surface  $S$  en elle-même, conservant le sens à une transformation du plan sans point invariant. Sur la surface  $S$  privée des points invariants de  $T$ , nous construisons la surface de recouvrement à connexion simple; la transformation  $\bar{T}$  de cette surface en elle-même engendrée par la transformation  $T$  révèle une certaine partie des propriétés de la transformation  $T$  elle-même; ensuite  $\bar{T}$  peut être considérée comme une transformation du plan en lui-même conservant le sens et n'admettant pas de point invariant. Ces circonstances montrent la nécessité d'approfondir l'étude des transformations du plan.

7. — *Sur les translations planes.* — Soit  $T$  une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens et n'ayant pas de point invariant. En vertu du théorème de M. BROUWER, il existe un domaine de la transformation,  $F$ , limité par deux lignes simples et ouvertes; l'ensemble complémentaire de  $F$  sur le plan consiste en deux domaines  $G$  et  $D$ . Nous désignons par  $F_n$  l'image de  $F$  obtenue par la trans-

formation  $T^n$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ); les domaines  $F_1, F_2, \dots$  appartiennent à  $D$ , et les domaines  $F_{-1}, F_{-2}, \dots$  à  $G$  (voir fig. 3). La réunion des domaines  $F_n$  est un domaine  $\Delta$  dans lequel la transformation  $T$  est homéomorphe à une translation métrique

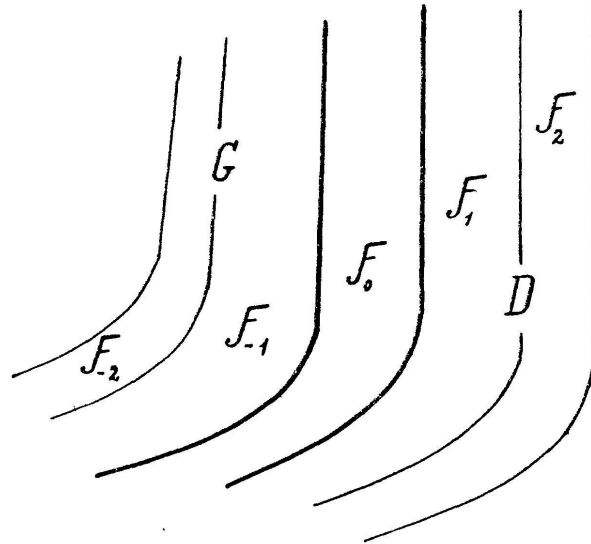


Fig. 3.

du plan. Cependant le domaine  $\Delta$  n'est pas nécessairement identique au plan entier; tel est le cas pour la translation:  $x' = x + 1, y' = y$ , si on prend pour  $F$  le domaine limité par les lignes

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad y = \frac{1}{x-1} \quad (x > 0);$$

les images successives de  $F$  ne remplissent que le demi-plan  $y > 0$ . Pourtant, pour cette transformation, on peut aussi construire un tel domaine  $F$  dont les images successives remplissent le plan entier. Mais il y a des transformations pour lesquelles c'est impossible [10]; tel est le cas dans l'exemple suivant (voir figure 4):

$$\begin{aligned} x' &= x + 1 - 2y, & y' &= + y^{1/2} & \text{pour} & \quad 0 \leq y \leq 1, \\ x' &= x + 1, & y' &= y & \text{pour} & \quad y < 0, \\ x' &= x - 1, & y' &= y & \text{pour} & \quad y > 1. \end{aligned}$$

Dans cette transformation, les lignes  $y = 0$  et  $y = 1$  sont singulières dans un certain sens que nous allons préciser tout à



l'heure; un domaine de la transformation ne peut pas comprendre à la fois des points appartenant aux demi-plans  $y < 0$  et  $y > 1$ . Cette transformation ne peut donc pas être homéomorphe à une translation métrique.

Nous projetons stéréographiquement le plan sur une sphère et nous entendons par la distance sphérique de deux points P

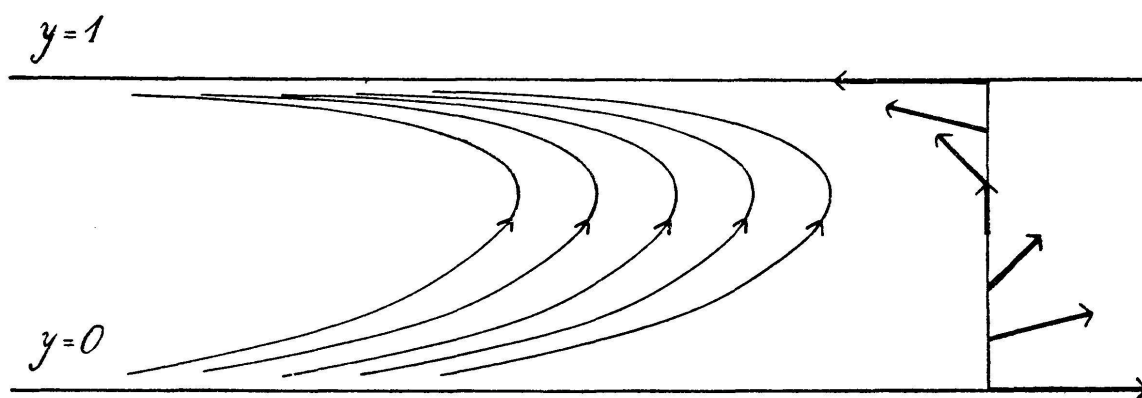


Fig. 4.

et Q du plan la distance sphérique des points qui leur correspondent sur la sphère. Nous entendons par l'expression que les puissances de la transformation T sont *uniformément continues* au point P la propriété suivante: pour toute quantité positive  $\epsilon$ , il existe un  $\delta > 0$  tel que, Q étant un point quelconque à une distance de P plus petite que  $\delta$ , les images de ces points,  $T^n(P)$  et  $T^n(Q)$ , obtenues par la transformation  $T^n$ , sont à une distance sphérique l'une de l'autre inférieure à  $\epsilon$ , pour  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Les points P pour lesquels cette condition se trouve vérifiée, sont appelés *réguliers*, les autres *singuliers*. Dans l'exemple de la figure 4, les points appartenant aux lignes  $y = 0$  et  $y = 1$  sont singuliers, les autres sont réguliers.

On reconnaît immédiatement que pour une translation métrique, tous les points du plan sont réguliers. J'ai démontré que cette propriété est caractéristique pour les transformations homéomorphes à une translation métrique; ce résultat s'exprime dans le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante sous laquelle une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens et n'admettant pas de point invariant est homéomorphe à une

translation métrique est qu'elle soit régulière en tout point du plan [14, 22].

8. — *Examen des caractères topologiques des représentations conformes.* — La définition de la régularité d'une transformation s'applique dans sa forme donnée ci-dessus à une surface close quelconque; on reconnaît aussi facilement qu'elle se conserve par une transformation topologique quelconque, et en particulier qu'elle est indépendante de la métrique spéciale de la surface. A l'aide de cette notion, on parvient à caractériser de la manière suivante les représentations conformes et biunivoques, manière qui répond au problème posé par M. BROUWER (n° 3):

La condition nécessaire et suffisante sous laquelle une transformation topologique de la surface d'une sphère en elle-même est homéomorphe à une transformation linéaire (ou homographique) est que la transformation soit régulière, excepté en un nombre fini de points, au plus. Elle est homéomorphe à une transformation elliptique parabolique ou hyperbolique suivant que le nombre des points singuliers est 0, 1 ou 2 [20, 23].

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une transformation topologique d'une surface close et orientable de genre  $p \geq 1$  en elle-même, conservant le sens, soit homéomorphe à une représentation conforme, est que la transformation soit régulière (en tout point de la surface). Pour  $p > 1$ , les transformations régulières sont périodiques [25, 26, 27].

9. — *Le groupe homographique.* — Les remarques faites au n° 2 montrent la nature différente des problèmes qui consistent à caractériser les transformations linéaires et le groupe des transformations linéaires à une variable complexe (groupe homographique). Un critère du groupe homographique donné par M. Süss [33] est le suivant:

Soit  $G$  un groupe de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même conservant le sens, et soit  $(k)$  un système de courbes simples et fermées sur la surface. Pour deux triples de points  $(A, B, C)$  et  $(A', B', C')$ , il existe une transformation de  $G$  et une seule qui transforme  $(A, B, C)$  en

$(A', B', C')$ . Par trois points quelconques passe une courbe du système  $(k)$  et une seule. Soient  $k$  et  $k'$  deux courbes du système  $(k)$  ayant un point  $B$  en commun, et soit  $A$  un point de  $k'$  distinct de  $B$ ; si une transformation de  $G$  transforme  $k'$  en lui-même et laisse les points  $A$  et  $B$  invariants, elle transforme aussi  $k$  en elle-même. Sous ces conditions, le groupe  $G$  est homéomorphe au groupe homographique, et le système  $(k)$  est homéomorphe au système des circonférences sur la sphère.

Cette solution du problème a l'inconvénient qu'elle introduit *a priori* les circonférences au lieu de les définir par le groupe. Voici un autre système de conditions qui évite cet inconvénient.

Soit  $G$  un groupe de transformations topologiques de la surface d'une sphère en elle-même conservant le sens, et dont chacune admet au plus un nombre fini de points singuliers. Pour deux triples de points  $(A, B, C)$  et  $(A', B', C')$ , il existe une transformation de  $G$  qui transforme  $(A, B, C)$  en  $(A', B', C')$  et qui varie continuellement avec le triple  $(A', B', C')$ . Les transformations de  $G$  qui laissent un point  $U$  invariant et qui sont régulières excepté au point  $U$ , forment un sous-groupe de  $G$ .

Je vais indiquer comment on peut définir les circonférences par le groupe  $G$ . Soient  $A, B$  et  $P$  trois points fixes, et soit  $P'$  un point variable. Il y a une transformation dans  $G$  et une seule qui laisse invariants les points  $A$  et  $B$  et qui transforme  $P$  en  $P'$ ; cette transformation varie continûment avec  $P'$ . Les transformations correspondant aux diverses positions de  $P'$  forment un groupe continu simplement transitif sur la surface privée des points  $A$  et  $B$ . Ce sous-groupe de  $G$  est commutatif et il est homéomorphe au groupe des translations d'une surface cylindrique en elle-même [19]. Il contient donc un sous-groupe clos d'ordre 1; les trajectoires de ce dernier sous-groupe sont les circonférences de centres  $A$  et  $B$ . Par l'étude de ces circonférences définies par le groupe, on parvient à caractériser le groupe homographique.

Les groupes des géométries euclidienne et non-euclidiennes planes peuvent être caractérisés comme des sous-groupes du groupe homographique; on obtient de cette façon une autre solution du problème résolu dans l'œuvre célèbre de M. HILBERT [12]. Je tiens à faire remarquer ici qu'un axiome de M. HILBERT

appelé « axiome de voisinage » (Axiom der Nachbarschaft) qu'il a introduit d'abord et qu'il a déduit ensuite de ses autres axiomes (surtout de l'axiome de « système fermé ») est en relation avec notre notion de régularité, et de même la notion d'ensemble de fonctions « également continues » due à ASCOLI. La différence essentielle consiste en ce que nous avons déterminé une propriété caractéristique d'une seule transformation en appliquant la condition d'égalité de continuité à l'ensemble de ses puissances.

10. — *La distribution des points singuliers d'une transformation.* — Nous considérons de nouveau les transformations du plan en lui-même sans point invariant; la recherche de la distribution de leurs points singuliers est importante en vue de ses applications.

Nous mentionnons la question suivante qui a été posée en relation avec des problèmes dynamiques:

Une transformation topologique du plan en lui-même conservant le sens et n'admettant pas de point invariant peut-elle être immergée dans un groupe continu d'ordre 1 du plan ?

La réponse négative découle des remarques suivantes. Si une transformation sans point invariant appartient à un groupe continu d'ordre 1, ses points singuliers forment des lignes simples et ouvertes sans point commun deux à deux. D'autre part, j'ai construit une transformation dont les points singuliers forment des lignes avec des points multiples; elle ne peut donc pas appartenir à un groupe continu d'ordre 1, et de plus, elle n'admet pas de racine carrée [24]. Il faut alors chercher les conditions concernant la distribution des points singuliers sous lesquelles une transformation peut être plongée dans un groupe continu d'ordre 1.

Voici quelques propriétés générales des points singuliers. Si  $T$  est une transformation topologique du plan sans point invariant et conservant le sens, les composants de l'ensemble de ses points singuliers sont des continus non-bornés; par conséquent tout domaine maximum consistant de points réguliers est à connexion simple, et s'il est invariant dans  $T$ , dans son intérieur la transformation  $T$  est homéomorphe à une translation métrique.

En reprenant les notations du n° 7, désignons par  $\Delta$  le domaine

qui est la réunion des images successives d'un domaine de la transformation  $F$ . Nous disons que  $\Delta$  est maximum s'il n'est pas un vrai sous-ensemble d'un autre domaine  $\Delta'$  de la même sorte. Si  $\Delta$  est maximum, tout point de sa frontière est un point singulier de  $T$ , mais la réciproque n'est pas vraie.

Nous appelons deux *points singuliers*  $P$  et  $Q$  *associés* s'il existe une suite de points  $P_1, P_2, \dots$  convergeant vers  $P$ , et une suite divergente d'entiers  $n_1, n_2, \dots$  tels que la suite  $T^{n_1}(P_1), T^{n_2}(P_2), \dots$  tende vers  $Q$ . Les points associés à un point singulier quelconque intérieur à  $\Delta$  se trouvent sur la frontière de  $\Delta$ ; ils forment un ensemble fermé dont les composants sont des continus non-bornés.

A l'aide de la notion des points singuliers associés, on peut décrire les propriétés de l'ensemble des points singuliers d'une transformation donnée.

11. — *Groupes continus.* — On peut étendre la notion de régularité aux surfaces et variétés non-compactes de la façon suivante. Nous ajoutons à la variété  $S$  ses éléments de frontière et nous considérons une famille de voisinages  $\{V\}$  des points et des éléments de frontière de  $S$ . Une transformation topologique  $T$  de  $S$  en lui-même est dite régulière au point  $P$  de  $S$ , si pour une famille arbitraire de voisinages  $\{V\}$ , il existe un voisinage  $U_P$  de  $P$  tel que, pour un point quelconque  $Q$  pris dans  $U_P$  et pour tout entier  $n$ , l'un au moins des voisinages  $V$  contienne à la fois les points  $T^n(P)$  et  $T^n(Q)$ . Pour les espaces métriques et compacts, cette définition est équivalente à celle donnée au n° 7.

J'ai démontré [21] que toute transformation appartenant à un groupe continu simplement transitif, d'ordre fini, est régulière en tout point de l'espace du groupe, et, de plus, la régularité est uniformément vérifiée pour les transformations du groupe. Cela veut dire que, dans la définition ci-dessus, on peut choisir le voisinage  $U_P$  du point  $P$  de telle façon que, pour toute transformation  $T$  du groupe, pour tout point  $Q$  de  $U_P$  et pour tout entier  $n$ , il y a un, au moins, des voisinages donnés  $V$  contenant à la fois  $T^n(P)$  et  $T^n(Q)$ . La signification théorique de notre résultat consiste en ce que les images d'un « petit » voisinage

obtenues par les transformations du groupe peuvent être regardées comme une famille de voisinages uniformément « petits » dans l'espace du groupe. Sa portée pratique consiste en ce que régularité ou singularité d'une transformation en un point exprime une propriété de structure, et alors l'existence d'un point singulier exclut que la transformation appartienne à un groupe continu simplement transitif. Ensuite, pour qu'une variété puisse représenter l'espace d'un groupe, il faut qu'elle admette des transformations régulières arbitrairement petites sans point invariant.

Il me paraît que le résultat ci-dessus est en relation avec la proposition suivante qui pour les groupes de transformations pseudo-conformes a été démontrée par M. H. CARTAN [11], mais qui est encore en suspens pour le cas général: Dans un groupe continu d'ordre fini, il existe un voisinage de l'identité qui ne contient aucun sous-groupe.

12. — *Applications aux systèmes dynamiques.* — En nous servant des méthodes de POINCARÉ concernant les relations entre les systèmes dynamiques et des transformations des surfaces, nos résultats précédents admettent des applications aux systèmes dynamiques à deux degrés de liberté. Notre notion de régularité correspond, en effet, à la *stabilité permanente* du système dynamique [4].

Considérons un système dynamique conservatif à deux degrés de liberté dont les états forment une variété close. Les solutions correspondant à une valeur de l'énergie peuvent être regardées comme des trajectoires dont l'ensemble remplit une variété close à trois dimensions. Une solution (périodique ou non) sera dite posséder la stabilité permanente si la condition suivante se trouve vérifiée: en changeant très peu les valeurs initiales de la solution donnée (correspondant à la valeur  $t = 0$  du temps), on obtient des solutions qui restent infiniment voisines de la solution primitive pour toute valeur de  $t$  ( $t > 0$  et  $t < 0$ ).

Construisons, d'après POINCARÉ, une surface de section  $S$  et considérons la transformation  $T$  de  $S$  en elle-même engendrée par des intersections consécutives avec les trajectoires. Cette transformation topologique de la surface  $S$  en elle-même est



régulière ou singulière au point  $P$  de  $S$  suivant que la trajectoire passant par  $P$  vérifie ou non la condition de stabilité permanente. En appliquant les résultats du n° 8, on obtient, à partir de là, le théorème suivant :

Si un système conservatif à deux degrés de liberté dont toutes les solutions vérifient la condition de stabilité permanente admet une surface de section de genre  $p > 1$ , toutes les solutions sont périodiques.

Nous signalons aussi une application de nos recherches au *problème ergodique*. Les recherches profondes de MM. VON NEUMANN [30] et BIRKHOFF [5, 6] ont conduit à ce résultat que l'ergodicité d'un système est une conséquence de l'hypothèse suivante appelée « transivité métrique » : Tout ensemble invariant dans la transformation, ou son ensemble complémentaire, est de mesure nulle. M. MORSE [29], a démontré qu'une hypothèse concernant l'« instabilité uniforme » entraîne la transivité métrique et, par conséquent, l'ergodicité du système. D'autre part, j'ai trouvé que pour les systèmes dynamiques à deux degrés de liberté, l'existence d'une solution, qui possède la stabilité permanente, exclut l'ergodicité du système, pourvu que le système admette une surface de section de genre  $p > 1$ . Cela revient à dire qu'une transformation topologique d'une surface close de genre  $p > 1$  en elle-même admettant un point régulier, au moins, ne peut pas satisfaire à la condition de transivité métrique [28].

Dans cet ordre d'idées, j'ai recherché les transformations *asymptotiquement périodiques*; je nomme ainsi des transformations qui ont des puissances différant de l'identité aussi peu que l'on veut; j'ai trouvé qu'elles sont périodiques dans le sens strict pour le cas des surfaces de genre  $p > 1$ . Il serait intéressant de connaître la structure des transformations asymptotiquement périodiques de la surface d'une sphère en elle-même; sont-elles homéomorphes à des rotations par un angle incommensurable à  $\pi$ , comme les transformations périodiques sont homéomorphes aux rotations d'angles commensurables à  $\pi$ ? Un problème important, concernant les transformations topologiques d'un cercle en lui-même, est le suivant: est-il possible que les images successives d'un point forment un ensemble partout dense dans

le cercle ? Pour les transformations dont les points invariants se trouvent à la frontière, c'est impossible; cet événement est aussi exclu si la transformation admet un point régulier dans l'intérieur du cercle; pour le cas général cette question n'est pas encore résolue.

Si  $T$  est une transformation topologique générale d'une surface en elle-même, il est possible que tous les points de  $S$  soient des points singuliers de  $T$ . La classification des points de  $S$  en des points réguliers et singuliers devient illusoire dans ce cas, et il faut diviser la surface en des ensembles de « transitivité » dans lesquels la transformation est régulière; il faut donc remplacer la notion de régularité, qui était féconde pour caractériser certaines classes de transformations et de groupes, par une notion de régularité régionale. Mais il me semble que, pour certaines classes de transformations, par exemple pour les transformations analytiques conservant l'aire, on peut établir, sous des conditions de nature générale, l'existence d'un point régulier, au moins. Peut-être de cette façon on réussira à démontrer l'existence d'une solution périodique vérifiant la condition de stabilité permanente dans le problème restreint des trois corps.

## BIBLIOGRAPHIE

1. G. D. BIRKHOFF. Proof of Poincaré's geometric theorem. *Transact. American Math. Soc.*, 14 (1913), p. 14-22.
2. ID. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.*, 43 (1920), p. 1-119.
3. ID. An extension of Poincaré's last geometric theorem. *Acta Math.*, 47 (1925), p. 297-311.
4. ID. *Dynamical Systems*, New York, 1927. (Voir en particulier p. 121.)
5. ID. Proof of the ergodic theorem. *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, Washington, 17 (1931), p. 656-660.
6. G. D. BIRKHOFF and B. O. KOOPMAN. Recent contributions to the ergodic theory. *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, Washington, 18 (1932), p. 279-282.
7. G. D. BIRKHOFF and P. A. SMITH. Structure analysis of surface transformations. *Journal de Math.*, 7 (1928), p. 345-379.
8. L. E. J. BROUWER. *Het Wezen der Meetkunde*, Amsterdam, 1909 (p. 19-20).
9. ID. Beweis des ebenen Translationssatzes. *Math. Annalen*, 72 (1912), p. 36-54.
10. ID. Remark on the plane translation theorem. *Proc. R. Acad. Amsterdam*, 21 (1918), p. 935-936.



11. H. CARTAN. Sur les groupes de transformations pseudo-conformes. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 196 (1933), p. 993-995.
12. D. HILBERT. Grundlagen der Geometrie, Anhang IV, Leipzig, 1900.
13. G. JULIA. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *Journ. de Math.* (7), 4 (1918), p. 47-245.
14. B. de KERÉKJARTÓ. On a geometrical theory of continuous groups, I. *Annals of Math.*, 27 (1925), p. 105-117 (p. 117).
15. ID. Démonstration élémentaire du théorème de translation dû à M. Brouwer. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 186 (1928), p. 1669-1671.
16. ID. Démonstration élémentaire du dernier théorème de Poincaré. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 187 (1928), p. 20-22.
17. ID. The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincaré. *Acta scient. math.*, Szeged, 4 (1928), p. 86-102.
18. ID. Note on the general translation theorem of Brouwer. *Atti d. Congresso Internaz. d. Mat.*, Bologna, 1928, 4 (1931), p. 235-238.
19. ID. Geometrische Theorie der zweigliedrigen kontinuierlichen Gruppen. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 8 (1930), p. 107-114.
20. ID. Sur le caractère topologique des représentations conformes. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 198 (1934), p. 317-320.
21. ID. Sur la régularité des transformations d'un groupe continu simplement transitif. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 198 (1934), p. 1114-1116.
22. ID. Ueber die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene. *Acta scient. math.*, Szeged, 6 (1934), p. 226-234.
23. ID. Topologische Charakterisierung der linearen Abbildungen, *Acta scient. math.*, Szeged, 6 (1934), p. 235-262; *Ergänzung. ibid.*, 7 (1934), p. 58-59.
24. ID. Sur le groupe des transformations topologiques du plan. *Annali d. R. Scuola Norm. Sup. Pisa* (2), 3 (1934), p. 393-400.
25. ID. Ueber die regulären Abbildungen des Torus. *Acta scient. math.*, Szeged, 7 (1934), p. 76-84.
26. ID. Ueber reguläre Abbildungen von Flächen auf sich. *Acta scient. math.*, Szeged, 7 (1934), p. 65-75.
27. ID. Bemerkung über reguläre Abbildungen von Flächen. *Acta scient. math.*, Szeged, 7 (1935), p. 206.
28. ID. Stabilité permanente et l'hypothèse ergodique. *C. R. Acad. d. Sciences*, Paris, 201 (1935), p. 123-124.
29. M. MORSE. Instability and transitivity. *Journ. d. Math.* (9), 14 (1935), p. 49-72.
30. J. v. NEUMANN. Proof of the quasi-ergodic hypothesis. *Proc. Nat. Acad. of Sciences*, Washington, 18 (1932), p. 70-82.
31. J. NIELSEN. Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen. *Acta Math.*, 50 (1927), p. 189-358; 53 (1929), p. 1-76; 58 (1931), p. 87-167.
32. H. POINCARÉ. Sur un théorème de Géométrie. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 33 (1912), p. 375-407.
33. W. SÜSS. Beiträge zur gruppentheoretischen Begründung der Geometrie, III. Topol. Kennzeichnung der linearen Abbildungen der Kugel. *The Tohoku Math. Journ.*, 28 (1927), p. 228-241.