

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET SES RELATIONS AVEC LES AUTRES BRANCHES DES MATHÉMATIQUES  
**Autor:** Menger, Karl  
**Kapitel:** I. — Géométrie des distances et géométrie analytique ÉLÉMENTAIRE.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27321>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

classiques et des problèmes dont s'occupe la plupart des mathématiciens.

Nous traiterons d'abord brièvement de quelques-uns des rapports entre la géométrie métrique et la géométrie analytique élémentaire des espaces ordinaires. Des remarques concernant l'algèbre et l'algèbre des vecteurs suivront. Nous passerons ensuite à l'étude de la convexité dont la théorie générale se lie étroitement à la géométrie axiomatique de l'espace ordinaire. Puis, toujours du point de vue des distances, nous introduirons la notion de courbure qui sera qualifiée pour servir de point de départ vers une géométrie différentielle. Nous terminerons par l'étude des lignes géodésiques qui nous fournira des résultats nouveaux très généraux relatifs au Calcul des variations.

## I. — GÉOMÉTRIE DES DISTANCES ET GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ÉLÉMENTAIRE.

En géométrie analytique élémentaire on prend comme point de départ de la théorie des espaces euclidiens à  $n$  dimensions la représentation de chaque point par  $n$  nombres  $x_1, x_2, \dots, x_n$  réels ou complexes selon qu'il s'agit de l'espace réel ou de l'espace complexe  $C_n$ . On appelle carré de la distance des points  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  le nombre <sup>1</sup>

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 \quad (1)$$

en se réservant de prendre comme distance la racine carrée positive de l'expression précédente dans le cas où celle-ci est non négative. Nous appellerons *espace à carrés de distances complexes* <sup>2</sup> un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout

<sup>1</sup> Pour les espaces *unitaires* on fixe comme distance le nombre réel

$$(y_1 - x_1)(\bar{y}_1 - \bar{x}_1) + \dots + (y_n - x_n)(\bar{y}_n - \bar{x}_n)$$

en désignant par  $\bar{x}$  le conjugué  $\xi - i\eta$  du nombre  $x = \xi + i\eta$ . Il est clair que du point de vue des distances cet espace unitaire à  $n$  dimensions est identique à un espace euclidien réel à  $2n$  dimensions.

<sup>2</sup> On peut généraliser cette notion et parler d'un espace à distances empruntées à un système donné  $S$ , par exemple à un corps de nombres au sens de l'algèbre abstraite ou à un groupe abstrait. Pour des applications au calcul des variations j'ai récemment étudié des espaces dont les distances ne satisfont pas à l'axiome de symétrie ( $\Delta_2$ ). On pourrait appeler les espaces satisfaisant aux axiomes ( $\Delta_1$ ) et ( $\Delta_2$ ) espaces à distances

couple  $p, q$  de deux de ses éléments il corresponde un nombre  $\overline{pq}^2$  (dit carré de la distance de  $p$  à  $q$ ) assujetti aux conditions:

$$\overline{pp}^2 = 0, \quad (\Delta_1)$$

$$\overline{pq}^2 = \overline{qp}^2. \quad (\Delta_2)$$

Dans un espace à carrés de distances complexes tout ensemble  $F$  ne contenant qu'un nombre fini de points, disons  $k$  points  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , est complètement caractérisé par les  $k^2$  carrés des distances des points de  $F$  entre eux, nombres qui peuvent être rangés dans une matrice. Il résulte des conditions  $(\Delta_1)$  et  $(\Delta_2)$  que cette matrice est symétrique et que sa diagonale principale ne contient que des zéros. Une question qui se pose de façon naturelle est la suivante: Étant donnée une matrice  $\|\alpha_{ij}\|$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ ) jouissant des deux propriétés mentionnées, sous quelles conditions peut-on la réaliser par les points d'un espace euclidien complexe ou réel, c'est-à-dire trouver  $k$  points  $a_1, a_2, \dots, a_k$  de cet espace tels que  $\overline{a_i a_j}^2 = \alpha_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k$ )?

Nous allons donner immédiatement la solution du problème plus général suivant <sup>1</sup>: Étant donné un espace à carrés de distances complexes  $C$  (c'est-à-dire une matrice de nombres en général infinie), établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on puisse l'appliquer sur un sous-ensemble de l'espace euclidien à  $n$  dimensions, et d'abord de l'espace complexe  $C_n$ . De façon précise, nous établirons les conditions pour qu'on puisse faire correspondre à chaque point de  $C$  un point et un seul de  $C_n$  de sorte que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  étant les points de  $C_n$  correspondant respectivement aux points  $p$  et  $q$  de  $C$ ,

---

*symétriques* complexes et réserver le nom d'espace à distances complexes à des ensembles dont la définition de la distance est assujettie à la condition  $(\Delta_1)$  seule.

Une étude systématique des espaces à distances non symétriques, par M. NOVAK, paraîtra dans le cahier 8 des *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums.*, Wien, 1936.

<sup>1</sup> La caractérisation des espaces euclidiens réels et de leurs sous-ensembles au moyen des conditions  $(\Delta^k)$  et  $(\Delta^k_0)$  se trouve dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 113. Pour une nouvelle démonstration voir *Amer. Journ. of Math.*, 53, p. 721. Des remarques sur  $C_2$  et  $E_{2,1}$  se trouvent dans *Ergebnisse eines mathem. Kolloquiums*, 2, p. 34; 4, p. 13; 5, p. 10, 16; les critères de  $E_{n,-n}$  dans *Tôhoku Math. Journ.*, 37, p. 475. La caractérisation générale des sous-ensembles de  $C_n$  et  $E_{n,s}$  que nous allons énoncer est due à M. WALD et se trouve dans son article, *Ergebnisse e. mathem. Kolloquiums*, 5, p. 32.

le nombre  $\overline{pq}^2$  donné avec l'espace  $C$  satisfasse toujours à la condition

$$\overline{pq}^2 = (y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2 .$$

Appelons déterminant des points  $p_1, p_2, \dots, p_k$  le nombre

$$\Delta(p_1, p_2, \dots, p_k) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \overline{p_1 p_2}^2 & \overline{p_1 p_3}^2 & \dots & \overline{p_1 p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_2 p_1}^2 & 0 & \overline{p_2 p_3}^2 & \dots & \overline{p_2 p_k}^2 \\ 1 & \overline{p_3 p_1}^2 & \overline{p_3 p_2}^2 & 0 & \dots & \overline{p_3 p_k}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \overline{p_k p_1}^2 & \overline{p_k p_2}^2 & \overline{p_k p_3}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Pour qu'un espace à carrés de distances complexes  $C$  puisse être appliqué sur un sous-ensemble de  $C_n$  il est nécessaire et suffisant que

$(\Delta_0^{n+3}) \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0$  pour tout système de  $n + 3$  points de  $C$

$(\Delta_0^{n+2}) \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0$  pour tout système de  $n + 2$  points de  $C$ .

Appelons  $E_{n,s}$  la partie de  $C_n$  constituée par les points  $(x_1, \dots, x_m, x'_{m+1}, \dots, x'_n)$ , les nombres  $x_1, \dots, x_m$  étant réels, les nombres  $x'_{m+1}, \dots, x'_n$  purement imaginaires,  $m$  étant égal à  $\frac{n+s}{2}$ . Posons  $x'_j = ix_j$  ( $j = m + 1, m + 2, \dots, n$ ),  $x_j$  réel. Le nombre (1) devient alors

$$(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2 - (y_{m+1} - x_{m+1})^2 - \dots - (y_n - x_n)^2 . \quad (1')$$

$s$  est la signature de cette forme quadratique. Le  $E_{n,s}$  est un espace à carrés de distances complexes tel que, pour chaque couple  $p, q$  de points,  $\overline{pq}^2$  soit réel.

Nous dirons que l'ensemble  $F$  des  $k$  points  $p_1, p_2, \dots, p_k$  est de rang  $r$  s'il satisfait aux conditions  $(\Delta_0^{r+2})$  et  $(\Delta_0^{r+3})$  sans satisfaire  $(\Delta_0^{r+1})$ , c'est-à-dire si les déterminants de tous les systèmes de  $r + 2$  et de  $r + 3$  points de  $F$  sont nuls, mais s'il existe un système  $r + 1$  points dont le déterminant est différent de 0.

Pour qu'un espace où  $\overline{pq}^2$  est toujours réel jouisse de la propriété d'être applicable sur un sous-ensemble de  $E_{n,s}$  il est suffisant (et évidemment nécessaire) que tout système de  $n + 3$  points de  $E$  jouisse de cette même propriété; et pour qu'un système  $F$  de  $n + 3$  points  $p_1, p_2, \dots, p_{n+3}$  soit applicable sur un système de  $n + 3$  points de  $E_{n,s}$  il faut et il suffit,  $r$  désignant le rang de  $F$ , 1° que l'on ait  $r \leq n$  et que 2° parmi les systèmes de  $r + 1$  points  $p_1, p_2, \dots, p_{r+1}$  de  $F$  pour lesquels  $\Delta(p_1, p_2, \dots, p_{r+1}) \neq 0$  il en existe un, tel que la suite des nombres

$$\Delta(p_1) = -1, \quad \Delta(p_1, p_2), \quad \Delta(p_1, p_2, p_3), \quad \dots, \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{r+1})$$

ne contienne pas deux zéros consécutifs et que le nombre  $N$  des changements de signes qu'elle présente après la suppression des zéros éventuels satisfasse à l'inégalité

$$\frac{n + s}{2} + (r - n) \leq N \leq \frac{n + s}{2} .$$

Pour  $s = n (= m)$  l'espace  $E_{n,s}$  est évidemment l'espace euclidien réel à  $n$  dimensions, le nombre (1') étant  $\sum_{j=1}^n (y_j - x_j)^2$  qui est toujours positif ou nul; on peut donc prendre comme distance (non négative) la racine carrée positive de cette expression.  $E_{n,n}$  jouit en outre de la propriété que ses points sont métriquement distingués, c'est-à-dire que

$$p \neq q \text{ implique } \overline{pq}^2 \neq 0 . \quad (\Delta_3)$$

Un espace à distances non-négatives et qui distingue métriquement les points est ce que M. FRÉCHET avait appelé un espace  $E$ . Voici une conséquence importante de la condition  $(\Delta_3)$ : Une application d'un espace  $E$  sur un autre espace  $E$  conservant les distances est nécessairement biunivoque, c'est, comme nous dirons, une *congruence*. Un espace  $E$  qui peut être appliqué sur un sous-ensemble d'un espace  $E$  est donc applicable sur celui-ci au moyen d'une congruence et sera dit *congruent* à ce sous-ensemble <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> C'est ainsi que l'espace unitaire à  $n$  dimensions est congruent à l'espace euclidien réel à  $2n$  dimensions.

Le résultat énoncé plus haut contient donc comme cas particulier le théorème suivant concernant l'espace euclidien réel  $E_n (= E_{n,n})$ :

*Pour qu'un espace  $E$  à distances non négatives et distinguant métriquement les points, soit congruent à un sous-ensemble de  $E_n$ , il est nécessaire et suffisant que l'on ait*

$$(\Delta_0^{n+3}) \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+3}) = 0 \text{ pour tout système de } n + 3 \text{ points de } E,$$

$$(\Delta_0^{n+2}) \quad \Delta(p_1, p_2, \dots, p_{n+2}) = 0 \text{ pour tout système de } n + 2 \text{ points de } E,$$

$$(\Delta^k) \quad \text{sgn } \Delta(p_1, p_2, \dots, p_k) = (-1)^{k+1} \text{ ou } 0$$

*pour tout système de  $k$  points de  $E$ , où  $k = 2, 3, \dots, n + 1$ .*

Remarquons qu'un espace  $E$  contenant plus de  $n + 3$  points et satisfaisant aux conditions  $(\Delta^k)$  pour  $k = 2, 3, \dots, n + 1$  et à  $(\Delta_0^{n+2})$  satisfait *eo ipso*<sup>1</sup> à la condition  $(\Delta_0^{n+3})$ . Pour qu'un espace séparable  $E$  soit congruent à un sous-ensemble de l'espace de HILBERT il faut et il suffit que les conditions  $(\Delta^k)$  soient satisfaites pour chaque entier  $k$ .

## II. — LA THÉORIE DE LA CONVEXITÉ ET SES RELATIONS AVEC LA GÉOMÉTRIE AXIOMATIQUE.

Passons à l'étude de propriétés plus géométriques de l'espace et de ses sous-ensembles. Dans ce but nous considérons un ensemble d'éléments quelconques tel qu'à tout couple d'éléments (« points »)  $p, q$  il corresponde un nombre réel  $\overline{pq}$  (« distance » de  $p$  et  $q$ ) qui satisfait à la condition  $\overline{pp} = 0$  pour tout  $p$  et à l'inégalité triangulaire  $\overline{pq} + \overline{qr} \geq \overline{pr}$  pour chaque triplet de points. Nous appellerons un tel ensemble un *espace triangulaire*. Particulièrement importants sont les espaces triangulaires à distances symétriques, non négatives, et qui distinguent métri-

<sup>1</sup> Un espace à distances complexes satisfaisant à la condition  $(\Delta_0^{n+2})$  ne satisfait pas nécessairement à la condition  $(\Delta_0^{n+3})$ . On trouvera une étude des systèmes de  $n + 3$  points non congruents à  $n + 3$  points de  $E_n$  bien que  $n + 2$  quelconques de leurs points soient congruents à  $n + 2$  points de  $E_n$  dans mon mémoire *Mathem. Annalen*, 100, p. 124. J'ai appelé de tels systèmes *pseudo-euclidiens*.