

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE  
**Autor:** Doetsch, Gustav  
**Kapitel:** I. — Introduction.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27305>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 31.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE <sup>1</sup>

PAR

Gustav DOETSCH (Freiburg i. B.).

## I. — INTRODUCTION.

1. — Il est bien connu que la distinction des types des équations aux dérivées partielles du second ordre subsiste même pour les équations les plus générales à un nombre arbitraire de variables indépendantes. Nous ne nous occuperons ici que des équations du second ordre à *deux variables* indépendantes qui sont *linéaires* par rapport aux *dérivées partielles du second ordre*

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Ces équations sont par conséquent de la forme suivante  
 $\left( p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right) :$

$$A(x, y)r + 2B(x, y)s + C(x, y)t + F(x, y, z, p, q) = 0.$$

L'équation est dite du *type parabolique* si l'égalité

$$AC - B^2 = 0$$

---

<sup>1</sup> Résumé de la Conférence faite les 17 et 18 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.* — La conférence a été faite en langue allemande; je tiens à exprimer ici mes remerciements à M<sup>lle</sup> A. HALPERN, de l'Université de Genève, qui a bien voulu se charger de la traduction en français.

L'essentiel de la *bibliographie* se trouve à la fin de cet article. Les travaux sont indiqués dans le texte par le nom de l'auteur et le numéro du mémoire entre crochets. Toute autre indication bibliographique est insérée dans le texte.

a lieu dans un domaine du plan des  $(x, y)$ . On peut alors, par un changement de variables, la ramener à la forme suivante

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right). \quad (1, 1)$$

Les *caractéristiques* de cette équation sont alors les droites  $y = \text{const.}$

2. — On peut mentionner *deux sources différentes* pour la théorie des équations paraboliques. Ceci explique que *les problèmes furent posés d'une façon différente* dans les travaux parus sur ce sujet.

1. Nous avons d'abord le *problème de Cauchy*, qui peut ici être posé de la même manière que pour les équations des autres types. Dans le cas de l'équation (1,1) on se donne  $z$  et  $\frac{\partial z}{\partial x}$  sur un segment de la droite  $x = x_0$ :

$$z \Big|_{x=x_0} = \varphi(y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=x_0} = \varphi_1(y)$$

et l'on cherche  $z$  dans un domaine adjacent d'étendue indéterminée. La droite  $x = x_0$  peut être remplacée par une courbe  $\mathfrak{C}$ , qui n'est pas une caractéristique. Si toutes les *données*, c'est-à-dire la fonction  $f$  de l'équation (1,1), les « valeurs initiales »  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  ainsi que la courbe  $\mathfrak{C}$  sont *analytiques* et si l'on demande que les *solutions* soient elles aussi *analytiques*, on aura une solution et une seule, ce qui est démontré par la théorie classique de Cauchy. Nous ne nous arrêterons pas à approfondir ici ce cas analytique à propos duquel il faut mentionner surtout le mémoire célèbre de S. DE KOWALEWSKY (*Crellesches Journal*, 80 (1875), pp. 1-32).

2. *La théorie de la propagation de la chaleur*. On sait que les exemples classiques des équations elliptiques et hyperboliques ont été puisés dans la Physique mathématique, en particulier dans la théorie du potentiel ainsi que dans la théorie des vibrations des milieux élastiques. De même, le type fondamental des équations paraboliques est donné par la théorie de la propagation de la chaleur dans un milieu à une dimension.

La température  $u$  dans un milieu conducteur homogène et à une dimension (par exemple dans un fil) satisfait à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (1,21)$$

(équation homogène de la chaleur) où  $x$  désigne l'abscisse,  $y$  le temps. (Toutes les équations paraboliques, linéaires et homogènes à coefficients constants peuvent être ramenées à ce type). Dans le cas où il y a des sources de chaleur à l'intérieur du fil, on aura l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y) \quad (1, 22)$$

(équation non homogène de la chaleur). Le problème qui se pose ici d'une façon naturelle est le suivant: Le fil a, à un moment donné  $y = 0$ , une certaine « température initiale »  $\Phi(x)$ . A ses extrémités  $x = 0$  et  $x = l$  on place deux sources de chaleur de température en général variable  $A(y)$  et  $B(y)$ . On cherche la distribution de la température à l'intérieur à un instant quelconque. Il s'agit donc ici d'intégrer l'équation différentielle dans un domaine entièrement déterminé, la demi-bande  $0 \leq x \leq l$ ,  $y \geq 0$ , les valeurs de la fonction sur les trois parties de la frontière étant données. Ici l'on ne parle plus de données analytiques, les fonctions  $\Phi(x)$ ,  $A(y)$ ,  $B(y)$  étant arbitraires. La solution classique de l'équation (1, 21) est la suivante:

$$u(x, y) = \int_0^y A(\eta) G(x, y - \eta) d\eta + \int_0^y B(\eta) G(l - x, y - \eta) d\eta + \int_0^l \Phi(\xi) \Gamma(x, \xi, y) d\xi, \quad (1, 23)$$

$G$  et  $\Gamma$  étant les « fonctions de Green » de la forme suivante:

$$G(x, y) = -\frac{1}{l} \frac{\partial \mathfrak{S}_3\left(\frac{x}{2l}, \frac{y}{l^2}\right)}{\partial x} = \frac{2\pi}{l^2} \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{l^2} y} \sin n\pi \frac{x}{l}, \quad (1, 24)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(x, \xi, y) &= \frac{1}{2l} \left[ \mathfrak{S}_3\left(\frac{x - \xi}{2l}, \frac{y}{l^2}\right) - \mathfrak{S}_3\left(\frac{x + \xi}{2l}, \frac{y}{l^2}\right) \right] = \\ &= \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 \frac{y}{l^2}} \sin n\pi \frac{x}{l} \sin n\pi \frac{\xi}{l}. \end{aligned} \quad (1, 25)$$

L'apport de chaleur au voisinage des extrémités est proportionnel à  $\frac{\partial u}{\partial x}$  d'une part et à la différence des températures du fil et de son voisinage de l'autre. L'on voit alors surgir des problèmes où l'on a des relations linéaires entre  $u$  et  $\frac{\partial u}{\partial x}$  données aux extrémités du fil.

Le véritable calcul de la solution de ces problèmes et d'autres semblables — envisagés aussi dans le plan et dans l'espace — fut tellement approfondi par FOURIER dans son mémoire célèbre « Théorie analytique de la chaleur » (1822) que, encore, POINCARÉ, dans son cours bien connu [1] fait en 1895, ne fit que suivre l'œuvre de Fourier. Mentionnons cependant que des savants célèbres du XIX<sup>e</sup> siècle, comme POISSON, LAMÉ et Lord KELVIN, ont apporté des idées essentielles et très ingénieuses pour le calcul de la solution.

3. — Le point de vue sous lequel le problème était envisagé jusqu'en 1905 est caractérisé par les deux questions que nous venons d'énoncer: la solution du problème de Cauchy dans le cas analytique en partant de l'équation générale (1, 1) et la solution de l'équation homogène de la chaleur (1, 21), pour quelques problèmes aux limites dans une demi-bande posés par la Physique mathématique. Or, précisément en 1905, un caractère entièrement nouveau paraît dans cette théorie. A cette époque HOLMGREN (Suède) envisagea le problème de Cauchy dans le cas non analytique et considéra d'autre part le problème de la chaleur pour des domaines plus généraux que la demi-bande. Il examina aussi la question de l'existence et de l'unicité des solutions ainsi que leur analyticité et la possibilité de leur prolongement analytique. En 1907, E. E. LEVI (Italie) fit progresser surtout la théorie de l'équation non homogène de la chaleur (ses autres résultats et en particulier le contenu de [1] furent dans l'essentiel anticipés par Holmgren; pour la question de priorité voir la note de Holmgren dans les *Comptes Rendus* 24.2.08). En 1913 et 1918, GEVREY (France) s'est attaqué à l'équation linéaire générale et aux équations essentiellement plus générales et dans deux grands mémoires très féconds mit au clair une fois pour toutes la question de l'existence et de

l'analyticité des solutions. Ses résultats n'ont pas été surpassés depuis. Mes propres travaux (publiés à partir de 1923) — commencés alors sans la connaissance des trois auteurs précités — traitent l'équation homogène de la chaleur dans le sein d'une théorie plus générale, celle des opérations fonctionnelles.

Je tracerai maintenant un résumé rapide du développement que la théorie des équations paraboliques prit depuis les travaux de Holmgren et j'attacherai le plus d'importance à un problème qui a été un peu négligé dans la littérature, à savoir à la question de l'unicité de la solution. Pour cela il est indispensable de mettre au clair la véritable signification du mot « solution ». Le fait qu'on peut attacher à ce terme des sens très différents et que cela entraîne de vastes conséquences n'a jamais été exprimé nettement dans la littérature. — Pour les autres parties de la théorie, je serai obligé de me restreindre aux résultats essentiels, sans quoi cet article prendrait l'étendue d'un livre.

## II. — LES DIFFÉRENTES CONCEPTIONS D'UNE « SOLUTION ».

1. — On sait depuis longtemps que la solution  $z(x, y)$  d'un problème aux limites ne représente pas nécessairement les valeurs sur la frontière elles-mêmes, puisque, en général, cette solution n'a pas de sens pour les points de la frontière. Ceci a lieu même pour des cas les plus simples, comme par exemple pour l'intégrale de Poisson, qui est solution pour le cercle du problème aux limites de l'équation de Laplace. La seule chose qu'on peut demander est que  $z(x, y)$  converge vers la valeur donnée sur la frontière quand  $(x, y)$  se rapproche d'un point de cette frontière; la même condition doit être posée pour les dérivées, si la valeur de celles-ci est donnée sur la frontière. Mais même cette convergence peut s'interpréter dans différents sens.

a) Du point de vue *mathématique* on envisagera une convergence à deux dimensions, définie par la condition suivante: étant donnée la valeur  $\zeta$  en un point  $(\xi, \eta)$  de la frontière, il doit être possible de déterminer pour chaque  $\varepsilon > 0$  un  $\delta > 0$  tel que l'on ait

$$| z(x, y) - \zeta | < \varepsilon$$