

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE  
**Autor:** Doetsch, Gustav  
**Kapitel:** II. — Les différentes conceptions d'une « solution ».  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27305>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

l'analyticité des solutions. Ses résultats n'ont pas été surpassés depuis. Mes propres travaux (publiés à partir de 1923) — commencés alors sans la connaissance des trois auteurs précités — traitent l'équation homogène de la chaleur dans le sein d'une théorie plus générale, celle des opérations fonctionnelles.

Je tracerai maintenant un résumé rapide du développement que la théorie des équations paraboliques prit depuis les travaux de Holmgren et j'attacherai le plus d'importance à un problème qui a été un peu négligé dans la littérature, à savoir à la question de l'unicité de la solution. Pour cela il est indispensable de mettre au clair la véritable signification du mot « solution ». Le fait qu'on peut attacher à ce terme des sens très différents et que cela entraîne de vastes conséquences n'a jamais été exprimé nettement dans la littérature. — Pour les autres parties de la théorie, je serai obligé de me restreindre aux résultats essentiels, sans quoi cet article prendrait l'étendue d'un livre.

## II. — LES DIFFÉRENTES CONCEPTIONS D'UNE « SOLUTION ».

1. — On sait depuis longtemps que la solution  $z(x, y)$  d'un problème aux limites ne représente pas nécessairement les valeurs sur la frontière elles-mêmes, puisque, en général, cette solution n'a pas de sens pour les points de la frontière. Ceci a lieu même pour des cas les plus simples, comme par exemple pour l'intégrale de Poisson, qui est solution pour le cercle du problème aux limites de l'équation de Laplace. La seule chose qu'on peut demander est que  $z(x, y)$  converge vers la valeur donnée sur la frontière quand  $(x, y)$  se rapproche d'un point de cette frontière; la même condition doit être posée pour les dérivées, si la valeur de celles-ci est donnée sur la frontière. Mais même cette convergence peut s'interpréter dans différents sens.

a) Du point de vue *mathématique* on envisagera une convergence à deux dimensions, définie par la condition suivante: étant donnée la valeur  $\zeta$  en un point  $(\xi, \eta)$  de la frontière, il doit être possible de déterminer pour chaque  $\varepsilon > 0$  un  $\delta > 0$  tel que l'on ait

$$| z(x, y) - \zeta | < \varepsilon$$

pour tous les  $(x, y)$  du domaine d'intégration pour lesquels on a

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 < \delta .$$

Si l'on suppose  $z$  continu par rapport à l'ensemble des deux variables à l'intérieur du domaine et si les valeurs sur la frontière sont elles-mêmes continues, cette condition peut s'exprimer ainsi: La fonction, définie à l'intérieur du domaine par  $z(x, y)$  et par les valeurs  $\zeta$  sur la frontière, doit être continue dans le domaine composé de « l'intérieur plus la frontière ». Cette condition se formule d'une manière analogue pour les dérivées s'il y a lieu. C'est toujours dans ce sens qu'on conçoit le raccord avec les valeurs sur la frontière dans des travaux purement mathématiques.

b) Cette conception cependant est de beaucoup trop étroite pour le point de vue de la *physique* et ici se présente un cas intéressant où la physique exige une conception plus générale que celle qui semble être imposée par le point de vue mathématique. Ainsi la conception a) exige que les valeurs sur la frontière soient elles-mêmes continues, par exemple, pour la propagation de la chaleur dans un fil, la température  $A(y)$  placée à l'extrémité  $x = 0$  doit avoir la même valeur pour  $y = 0$  que la température initiale  $\Phi(x)$  pour  $x = 0$ . Dans les cas pratiques cependant c'est généralement le contraire qui a lieu; ce serait un hasard particulier si la flamme avait au commencement de l'expérience la même température que la place qu'elle chauffe. (Il est même caractéristique que dans le tout premier problème dont Fourier donne la solution dans son grand ouvrage les valeurs sur la frontière ne soient pas continues; il s'agit ici de la distribution stationnaire de température dans une plaque ayant la forme d'une demi-bande et les valeurs sont égales à un sur le segment fini de la frontière, à zéro sur les demi-droites). Nous ne pouvons donc pas parler d'une continuité à deux dimensions de la fonction « solution plus valeurs sur la frontière ». Pour la propagation de la chaleur on sait clairement comment la physique doit interpréter le raccord avec les valeurs sur la frontière<sup>1</sup>: Si à un

<sup>1</sup> L'interprétation que nous donnons aux conditions aux limites est intimement liée au fait que la chaleur se propage avec une vitesse infinie. Une interprétation très différente peut s'imposer pour des phénomènes qui se traduisent par des équations hyperboliques et qui, par conséquent, se propagent avec une vitesse finie: l'observateur qui établit les conditions aux limites devrait se déplacer avec une vitesse moindre que celle du phénomène (Doetsch [8], p. 70).

moment donné on avançait de l'intérieur vers l'extérieur du fil, on devrait y trouver la température placée sur la frontière; et si en partant d'un temps  $y > 0$  l'on reconstituait dans le temps la température d'une place intérieure déterminée, l'on devrait y trouver la température initiale donnée. Dans le plan des  $(x, y)$  cela signifie que l'on exige le raccord continu avec les valeurs sur la frontière seulement pour des chemins qui aboutissent perpendiculairement à la frontière (raccord à *une dimension*); cette condition s'exprime d'une manière analogue pour les dérivées s'il y a lieu <sup>1</sup>. Si les frontières ne sont pas rectilignes on exigera, conformément à la nature du problème, que ce chemin soit normal à la frontière, parallèle aux axes ou une autre condition pareille. Dans ce sens les discontinuités comme celles qui viennent d'être signalées gardent une signification précise: les sommets  $(0,0)$  et  $(l, 0)$  de la demi-bande ne peuvent pas être atteints si l'on se dirige de l'intérieur normalement à la frontière.

Nous appellerons *particulier* l'énoncé du problème tel qu'il était décrit dans *a*), *général* l'énoncé <sup>2</sup> sous la forme donnée dans *b*). Les deux cas ont leur sens et leur justification et se présentent à juste titre comme deux classes différentes de la théorie des problèmes aux limites.

2. — Toute méthode de résolution d'un problème aux limites doit faire certaines hypothèses sur la *nature des solutions* ainsi que sur les *valeurs sur la frontière*, sans quoi il serait impossible d'appliquer la méthode et d'attribuer un sens à la solution trouvée. Ainsi la solution (1,23) donnée sous forme d'intégrale exige tout au moins l'intégrabilité des valeurs sur la frontière. En plus, on ne peut démontrer le raccord même à une dimension avec les valeurs sur la frontière que pour des points pour lesquels on a des hypothèses supplémentaires, telles que continuité ou identité de la valeur de la fonction avec certaines valeurs moyennes. (C'est ici qu'intervient la théorie des intégrales singulières). Il n'y a pas de recherches pour les équations para-

<sup>1</sup> Voir l'article de HILB et SZASZ, *Allgemeine Reihenentwicklungen. Enzyklopädie*, II, 3, fascicule 8, § 6, p. 1245, où l'on trouve une indication d'une définition semblable des conditions aux limites avec la note suivante: « Gerade diese der Natur des Problems angepasste Fragestellung ist bisher in der Literatur verhältnismässig wenig behandelt ».

<sup>2</sup> En allemand: « Spezielle » und « allgemeine » Problemstellung.

boliques concernant l'existence des solutions dans le cas d'une non-intégrabilité des valeurs sur la frontière ni sur l'interprétation possible des conditions aux limites dans ce cas. Les démonstrations de l'unicité nécessitent surtout une série d'hypothèses sur les solutions et sur certaines dérivées, hypothèses comme l'intégrabilité à une ou deux dimensions, continuité, etc. Ce sont toutes des hypothèses étrangères à la nature du problème qui, par conséquent, doivent être chaque fois nettement explicitées <sup>1</sup>.

3. — L'on voit alors ceci: Pour que le problème soit clairement posé il est indispensable d'une part de préciser quelles conditions on impose à la solution et aux valeurs sur la frontière, de fixer d'autre part le sens dans lequel les conditions aux limites doivent être interprétées.

Il est à regretter qu'une partie même de la littérature moderne, pour ne plus parler de la plus ancienne, reste extrêmement vague sous ce rapport. Ceci entraîne d'une part que les théorèmes et démonstrations sont faux eux-mêmes, d'autre part que des théorèmes, justes sous certaines restrictions, sont employés dans des cas où ces restrictions ne sont pas respectées. Ce sont surtout les démonstrations d'unicité qui montrent la gravité décisive du sens dans lequel on envisage le problème aux limites.

### III. — LA QUESTION D'UNICITÉ OU DE MULTIPLICITÉ DES SOLUTIONS.

1. — Dans les ouvrages parus avant 1925 on ne voit nulle part surgir un doute sur l'unicité de la solution des équations paraboliques <sup>2</sup>, on y trouve, au contraire, une série de démonstrations du fait que la solution, si elle existe, est bien unique; ainsi

---

<sup>1</sup> Dans le cas de l'énoncé particulier du problème on a l'habitude d'appeler régulières les solutions de l'équation (1,1) qui sont, ainsi que leurs dérivées  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ , continues dans le domaine plus la frontière.

<sup>2</sup> Seul M. É. Picard indiquait à l'occasion (*Sur le développement de l'Analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences*, Paris, 1905), sans d'ailleurs insister, que si l'on envisageait la propagation de la chaleur dans un conducteur illimité l'on devait, pour démontrer l'unicité, admettre des hypothèses sur l'allure à l'infini de la fonction et de ses dérivées. Mais c'est plutôt le fait qu'un cas limite exige des considérations particulières, qui est souligné ici.