

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES CONDITIONS AUX LIMITES INTRODUITES PAR  
L'HYDRODYNAMIQUE  
**Autor:** Weinstein, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27307>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LES CONDITIONS AUX LIMITES INTRODUITES PAR L'HYDRODYNAMIQUE <sup>1</sup>

PAR

A. WEINSTEIN.

---

On désigne habituellement par « problème aux limites » tout problème du type suivant: « Déterminer dans un domaine *donné* une solution d'une équation différentielle par certaines conditions imposées à cette solution sur la frontière du domaine ». Le problème classique de ce genre est le problème de Dirichlet.

A première vue, plusieurs problèmes posés par l'Hydrodynamique semblent appartenir à cette catégorie. En réalité, ces problèmes hydrodynamiques se distinguent nettement des problèmes aux limites usuels par une difficulté essentielle et caractéristique: Le domaine d'intégration qui coïncide avec le domaine du fluide en mouvement, est limité, totalement ou en partie, par des frontières qui ne sont pas données. Ainsi les conditions aux limites se trouvent souvent posées sur des limites inconnues elles-mêmes. Ces « *frontières ou surfaces libres* » qu'il faut bien distinguer des *frontières données* (« parois solides » ou « obstacles »), doivent être elles-mêmes déterminées par l'ensemble des conditions du problème.

Les problèmes de ce genre sont très nombreux et remontent en partie à l'époque même de la découverte de l'Analyse infinitésimale. Nous aurons ici le plaisir d'entendre un exposé tout à fait compétent sur les figures d'équilibre des planètes, dont se sont déjà occupées Newton et Mac Laurin. Aussi mon aperçu

---

<sup>1</sup> Résumé des conférences faites en décembre 1933 et en juin 1935 dans les *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève.

pourra se limiter à quelques problèmes de mouvements permanents d'un fluide parfait de densité constante ayant lieu dans un plan  $(x, y)$ . Il s'agira en majeure partie des problèmes de Helmholtz concernant les jets et les sillages, mais j'espère pouvoir aussi dire quelques mots sur le mouvement ondulatoire dans un canal de profondeur finie ou infinie. Nous allons voir qu'il existe une différence essentielle entre les deux classes de problèmes que je viens de nommer. Il va sans dire que je me tiendrai strictement aux lignes générales du programme de ce Colloque en ne parlant que des questions d'unicité et d'existence que nous pose l'Hydrodynamique.

Considérons d'abord les *ondes permanentes*. Le mouvement a lieu dans un canal sous l'action de la gravitation. Le fluide est limité supérieurement par une « ligne libre »  $l$ , inconnue *a priori*, qui se déplace sans changement de forme avec une vitesse constante  $C$  (« vitesse de propagation »), les vitesses réelles des particules étant très petites par rapport à  $C$ . Dans un système d'axes

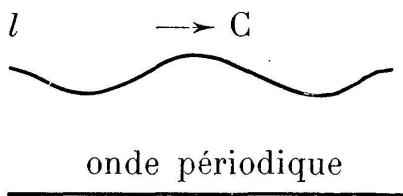


Fig. 1.

$(x, y)$  lié à  $l$  cette ligne paraît immobile; le mouvement est alors permanent et la vitesse ne dépend que de  $x, y$ . On étudie les ondes dans l'hypothèse que la ligne  $l$  diffère très peu d'une droite horizontale, c'est-à-dire on se borne à considérer les mouvements (absolus) voisins du repos. *Le problème des ondes est donc un problème local*. La partie donnée de la frontière, c'est-à-dire le fond du canal, est une droite qui se réduit au point à l'infini dans le cas de profondeur infinie. La présence de ces parois données de forme très simple n'apporte pas de complication notable pour la théorie: le problème des ondes peut être considéré en principe comme un *problème à frontière libre* partout.

Par contre, *la forme de la paroi donnée*, limitant partiellement le fluide, joue un rôle prédominant dans les problèmes des sillages et des jets posés par Helmholtz.

Dans le cas du *sillage* en présence d'un obstacle donné, le fluide en mouvement permanent occupe un domaine du plan  $(x, y)$  qui s'étend à l'infini et qui est limité en partie par la paroi

(arc curviligne) donnée  $\bar{\omega}$  et par des lignes libres  $\lambda$  non données qui séparent le liquide en repos du liquide en mouvement (fig. 2).

Une question du même genre est le problème de l'écoulement d'un jet jaillissant à travers un orifice percé dans un canal à parois données (fig. 3). Il s'agit dans les deux cas de déterminer le mouvement en supposant l'absence de forces extérieures. Ces problèmes sont des problèmes *non locaux*: la solution cherchée n'est pas voisine d'une solution connue.

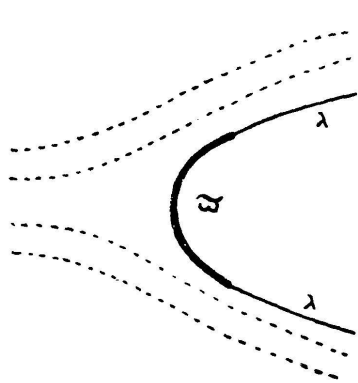


Fig. 2.

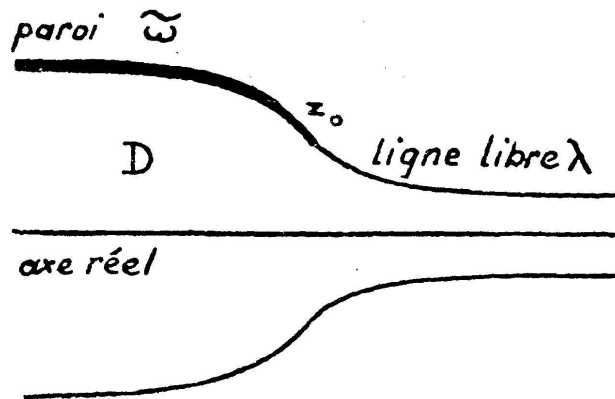


Fig. 3.

Les inconnues des différents problèmes que nous venons d'énoncer sont non seulement les composantes  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  de la vitesse, mais aussi les frontières libres du fluide en mouvement.

L'équation de continuité  $u_x + v_y = 0$  permet de substituer à  $u$  et  $v$  une seule inconnue, la fonction de courant  $\psi$  définie par les relations

$$\psi_x = -v, \quad \psi_y = u. \quad (1)$$

Dans le cas d'un mouvement irrotationnel, on aura en outre un potentiel de vitesse  $\varphi$  défini par les équations

$$\varphi_x = u, \quad \varphi_y = v, \quad (2)$$

La fonction  $f = \varphi + i\psi$  (potentiel complexe) sera alors une fonction analytique de la variable complexe  $z = x + iy$ . Nous poserons  $f'(z) = \omega = u - iv$ . Les fonctions  $\varphi$  et  $\psi$  satisfont à l'équation de Laplace:  $\Delta\varphi = 0$ ;  $\Delta\psi = 0$ . (Dans le cas rotationnel, où  $\varphi$  n'existe pas,  $\psi$  satisfait à l'équation de Lagrange:  $\Delta\psi =$  fonction arbitraire de  $\psi$ .)

Sur la frontière la vitesse est partout tangentielle: ce fait s'exprime par la relation  $dx:dy = u:v$ , c'est-à-dire par l'équation

$$d\psi = 0 \tag{3}$$

La frontière du fluide se compose généralement de plusieurs lignes sans points communs. D'après (3),  $\psi$  prend sur chacune de ces lignes une valeur constante. Ces constantes sont *inconnues* sauf l'une d'elles qui peut être arbitrairement égalée à zéro.

L'équation de la conservation de l'énergie nous donne une condition en plus sur les lignes libres. On aura

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + p = \begin{cases} \text{const. pour les problèmes de Helmholtz} \\ \text{const.} + gy \text{ pour les ondes.} \end{cases} \tag{4}$$

La pression  $p(x, y)$  sur ces lignes est égale à la pression constante à l'extérieur du fluide. On obtient, par conséquent, en choisissant convenablement l'unité du temps la *condition non linéaire* suivante sur les lignes libres:

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 \begin{cases} = 1 & \text{(problèmes de Helmholtz)} \\ = 2gy + \text{const.} & \text{(problème des ondes)} \end{cases} . \tag{5}$$

*Changement de variables.* Les conditions  $\psi = \text{à des constantes}$  permettent de substituer par un changement de variables un domaine connu au domaine inconnu primitif.

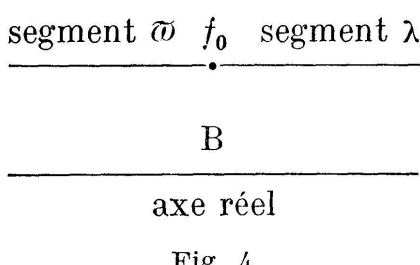
Prenons dans le cas irrotationnel  $\varphi$  et  $\psi$  comme variables indépendantes et  $u, v$  comme inconnues. Cette transformation est légitime sous l'hypothèse que le déterminant fonctionnel

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2 = |f'(z)|^2$$

ne s'annule pas.

Nous aurons: 1° dans le cas du jet et des ondes irrotationnelles dans un canal à profondeur finie, comme image du champ du

segment  $\varpi$   $f_0$  segment  $\lambda$   $f: 0 \leq \psi \leq \text{const.}$ , dont la largeur n'est pas donnée; 2° dans le cas d'un sillage on aura un plan  $f$  entaillé le long de l'axe des  $\varphi$  positifs. Remarquons que l'image des points de détachement des



lignes libres est inconnue; 3° enfin, dans le cas des ondes dans un canal de profondeur infinie, on aura pour domaine-image un demi-plan  $f$ .

La correspondance entre les plans  $z$  et  $f$  est une représentation conforme. On prévoit donc toute l'importance de la théorie des fonctions analytiques pour nos problèmes. Sans vouloir sous-estimer le rôle de cette théorie, je voudrais attirer votre attention sur une transformation non-conforme qui permet également d'introduire un domaine connu. Il suffit pour cela de prendre  $x$  et  $\psi$  comme variables indépendantes et de considérer  $y = y(x, \psi)$  comme nouvelle inconnue. (On suppose, bien entendu,  $\psi_y \neq 0$ ). Cet artifice a été récemment utilisé avec succès par M. FRIEDRICHS dans le cas du jet (l. c., p. 117), et, indépendamment, par M<sup>me</sup> DUBREIL-JACOTIN<sup>1</sup> dans le problème des ondes rotationnelles. Il me paraît utile de signaler ces transformations non-conformes aux hydrodynamiciens qui pourraient avoir de l'intérêt à rechercher des artifices analogues dans des problèmes à trois dimensions.

*Les transformations indiquées plus haut permettent de ramener le problème des ondes à un problème non linéaire « aux limites » aux frontières données.* En effet, en considérant, pour fixer les idées, le cas d'un canal de profondeur finie, on aura sur le bord supérieur de la bande  $0 \leq \psi \leq \text{const.}$  la condition (5) écrite dans les nouvelles variables. Sur le fond ( $\psi = 0$ ) la condition aux limites sera particulièrement simple, puisqu'il suffira d'écrire que la vitesse  $y$  est horizontale ( $v = 0$ ) partout. Ainsi le problème des ondes se réduit en principe à un problème aux limites non linéaire dans un domaine donné. Il est nécessaire toutefois de signaler une difficulté tout à fait spéciale de cette question: *Le domaine de la bande n'est pas un domaine borné.* Cette difficulté ne se présente pas d'ailleurs dans la *théorie des ondes périodiques*<sup>2</sup>, qui est, pour cette raison, plus développée que la *théorie de l'onde solitaire*<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> M.-L. DUBREIL-JACOTIN, Sur la détermination rigoureuse des ondes périodiques d'ampleur finie. *Journal de Mathématiques*, 1934.

<sup>2</sup> T. LEVI-CIVITA, Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie. *Math. Ann.*, t. 93, 1925, p. 264. — D. J. STRUICK, Détermination rigoureuse des ondes irrotationnelles permanentes dans un canal à profondeur finie. *Math. Ann.*, t. 98, 1927, p. 595.

<sup>3</sup> A. WEINSTEIN, Sur la vitesse de propagation de l'onde solitaire. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1926.

Considérons maintenant l'effet d'un changement de variables pour les problèmes de Helmholtz. Il est important de se rendre compte que ce changement ne ramène pas ces questions à des problèmes usuels aux limites. En effet, examinons par exemple plus en détail le problème du jet symétrique. Il suffira de considérer la partie supérieure du mouvement. Son image sera dans le plan  $f = \varphi + i\psi$  une bande limitée par les droites  $\psi = 0$ ,  $\psi = \mu \frac{\pi}{2}$ , la constante  $\mu$  n'étant pas donnée. Signalons que  $\mu\pi$  désigne le débit (inconnu) du jet.

Le *problème fondamental* ou *problème de Helmholtz*<sup>1</sup> qui se pose pour la fonction  $z(f)$  peut être énoncé dans le cas du jet comme il suit :

*Transformer conformément la bande  $0 \leq \psi \leq \mu \frac{\pi}{2}$  du plan  $f$  en un domaine  $D$  du plan  $z = x + iy$  de sorte que soient réalisées les conditions suivantes :  $D$  doit être limité par l'axe des  $x$ , par une ligne (paroi  $\sigma$ ) donnée, joignant le point  $z = -\infty$  à un point  $z_0 = iy_0$  et par une ligne libre non donnée  $\lambda$  qui se détache de  $z_0$ . En chacun des points de cette ligne la transformation cherchée doit conserver les longueurs (c'est-à-dire que l'on doit avoir  $|dz/df| = 1$  sur  $\lambda$ ).*

Une dilatation convenablement choisie permet d'introduire, au lieu de la bande  $0 \leq \psi \leq \mu \frac{\pi}{2}$ , la bande  $B: 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$  (fig. 4). On aura alors (en conservant les notations) sur le segment  $\lambda$  du plan  $f$ , au lieu de la *condition isométrique*  $|dz/df| = 1$ , la *condition quasi-isométrique*  $|dz/df| = \mu$  : la transformation cherchée multiplie les longueurs par une constante positive  $\mu$  *inconnue*. Le problème ainsi posé par la théorie de Helmholtz se distingue nettement du célèbre problème de représentation conforme énoncé par Riemann, qui ne traite que la représentation d'un domaine *donné* sur un domaine *donné*.

Bien des années avant que ne fut abordée la question de l'unicité et de l'existence des solutions des problèmes posés par la théorie de Helmholtz, M. LEVI-CIVITA a donné la solution

<sup>1</sup> Signalons que Helmholtz, Kirchhoff, ainsi que plusieurs autres savants, se sont limités depuis 1868 jusqu'au début du XX<sup>e</sup> siècle à des exemples très particuliers. Encore en 1907, M. Levi-Civita signalait le fait que le problème fondamental dépassait les moyens de l'Analyse de cette époque.

(très perfectionnée par M. VILLAT<sup>1</sup>) du problème suivant: Déterminer dans la bande B la famille des fonctions  $z(f)$  qui satisfont sur le segment  $\lambda$  à la condition quasi-isométrique  $|dz/df| = \mu$ .

Aucune condition n'est imposée dans ce problème aux valeurs de  $z(f)$  sur le segment  $\varpi$  du plan  $f$ . M. Levi-Civita substitue donc au problème de Helmholtz le problème de la recherche de l'intégrale générale fournissant la solution indéfinie (ou indéterminée)<sup>2</sup>.

Posons

$$dz/df = 1/\omega = \mu e^{i\omega} = \mu e^{-\tau+i\theta} ; \quad (\omega = \theta + i\tau) \quad (6)$$

La fonction  $\omega$  sera réelle sur le segment  $\lambda$ . Or toutes les fonctions  $\omega(f)$  réelles sur  $\lambda$  peuvent être explicitement exprimées sous forme de séries de certaines fonctions élémentaires  $g_n(f)$  connues: on aura, d'après M. Levi-Civita,  $\omega(f) = \sum_1^{\infty} c_n g_n(f)$  ou les coefficients  $c_n$  sont arbitraires. On peut aussi écrire la fonction  $\omega(f)$  sous forme d'intégrale indiquée par M. Villat et généralisant celle de Poisson. Cette intégrale dépend des valeurs arbitraires de  $\theta$  sur le segment  $\varpi$  du plan  $f$ . Chacune de ces fonctions  $\omega$  détermine une fonction correspondante  $z(f)$  satisfaisant à la condition quasi-isométrique sur  $\lambda$ . En effet, la formule (6) nous donne par une quadrature l'intégrale générale cherchée

$$z - z_0 = \int_{f_0}^f \frac{dz}{df} df = \int_{f_0}^f \frac{df}{\omega(f)} = \mu \int_{f_0}^f e^{i\omega(f)} df . \quad (7)$$

La paroi correspondante au segment  $\varpi$  dépend du choix de la fonction arbitraire  $\omega$  et ne peut être donnée *a priori*. L'importance de l'intégrale générale est évidente: La solution d'un problème de Helmholtz, si elle existe, correspondra à un certain choix de la fonction  $\omega(f)$ . De plus, l'intégrale générale permet de prévoir toutes les singularités qui pourraient survenir.

Nous allons maintenant revenir sur le problème fondamental

<sup>1</sup> T. LEVI-CIVITA, Scie e legge di resistenza. *Rend. d. Circolo Mat. di Palermo*, t. 23, 1907. — H. VILLAT, Sur la résistance des fluides. *Ann. de l'Ec. Normale*, 1911, p. 203.

<sup>2</sup> M. D. RIABOUCHINSKY a proposé pour cette question le nom de « problème mixte direct ». Une nouvelle solution, basée sur une formule de M. Signorini, en a été donnée par M. B. DEMTCHENKO, *Problèmes mixtes harmoniques*, Paris, Gauthier-Villars, 1933. Le problème de Helmholtz pourrait être désigné comme « problème mixte inverse », mais cette dénomination a été déjà employée, *l. c.*, pour un problème qui ne diffère pas essentiellement du « problème direct ».



énoncé plus haut et aborder la question de l'unicité de la solution. On s'aperçoit immédiatement que les méthodes classiques de la théorie de la représentation conforme, par exemple le lemme de Schwarz, ne donnent aucun résultat. Aussi la question de l'unicité sera même plus ardue que le théorème d'existence. Posons d'abord le problème de l'unicité infinitésimale<sup>1</sup>: *Démontrer qu'il n'existe pas de solution infiniment voisine d'une solution donnée, c'est-à-dire de solution correspondante à la même paroi donnée, mais différente infiniment peu par la forme de la ligne libre.*

Soit  $f(z)$  la solution supposée donnée,  $\hat{f}(z)$  une solution infiniment voisine. Formons la variation  $\delta f = \hat{f}(z) - f(z)$ . *Le théorème de l'unicité infinitésimale affirme que  $\delta f$  s'annule identiquement.*

La variation  $\delta f$  vient d'être définie dans le domaine  $D$  de la solution supposée connue. A ce domaine correspond d'une manière biunivoque et conforme la bande  $B$  du plan  $f$ . On peut donc considérer  $\delta f$  comme fonction de  $f$ . Nous obtiendrons d'après la définition de la variation  $\delta f$  une expression générale de cette fonction en faisant varier, dans la formule (7),  $f$  pour une valeur fixe de  $z$ . On obtient ainsi l'équation

$$0 = \frac{\delta f}{\omega(f)} - \int_{f_0}^f \frac{\delta \omega}{\omega^2} df$$

c'est-à-dire

$$\delta f = \omega \int_{f_0}^f \frac{\delta \log \omega}{\omega} df. \quad (8)$$

En dérivant cette dernière équation<sup>2</sup> par rapport à  $f$  on obtient la *relation fondamentale* entre  $\delta f$  et  $\delta \log \omega$ :

$$\frac{d(\delta f)}{df} - \frac{d \log \omega}{df} \delta f = \delta \log \omega. \quad (9)$$

<sup>1</sup> A. WEINSTEIN, Sur l'unicité des mouvements glissants. *C. R.*, 1923, p. 493. — Sur les jets liquides à parois données. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1926, p. 119.

<sup>2</sup> On pourrait envisager aussi une *variation infinitésimale des parois*. Dans ce cas on aurait au lieu de (8) l'équation

$$\delta f = \omega \left\{ \int_{f_0}^f \frac{\delta \log \omega}{\omega} df - i \delta y_0 \right\} \quad (8')$$

(où  $\delta y_0$  désigne la variation du point de détachement), mais la *relation fondamentale* (9) ne changerait pas de forme.

Cette formule qui n'est qu'une identité à l'intérieur de la bande B, nous donne, en vertu de la condition quasi-isométrique, une condition aux limites pour la variation  $\delta f = \delta\varphi + i\delta\psi$  sur  $\lambda$ . La partie réelle de (9) se réduit sur le segment  $\lambda$  à la condition linéaire

$$\frac{d(\delta\psi)}{dn} - \frac{d\theta}{d\varphi} \delta\psi = -\delta \log \mu \quad (dn = d\psi) . \quad (10)$$

La variation inconnue de la constante quasi-isométrique  $\mu$  y figure explicitement au second membre. On a d'ailleurs  $\frac{d\theta}{d\varphi} = \mu \frac{d\theta}{|dz|} = \mu c$  où  $c$  désigne la courbure de la ligne libre de la solution supposée donnée.

Il est important de remarquer que, jusqu'à présent, nous ne nous sommes pas servi de l'hypothèse que la solution infiniment voisine correspond aux mêmes parois que la solution donnée. La condition (10) est indépendante de cette hypothèse. L'influence de l'invariance des parois sur une variation éventuelle des lignes libres nous est pour le moment profondément cachée. En raison de cette difficulté caractéristique du problème nous ne possédons sur  $\lambda$  d'autre condition que celle qui est donnée par (10). Cette équation est une *condition intrinsèque* aux limites; elle a lieu indépendamment des conditions imposées sur les autres parties de la frontière.

Ces dernières conditions sont très faciles à établir. En prenant un point  $z$  fixe sur la paroi donnée on aura  $f = \varphi + i\frac{\pi}{2}$ ,  $\hat{f} = \hat{\varphi} + i\frac{\pi}{2}$ , c'est-à-dire

$$\delta\psi = 0 . \quad (11)$$

La même condition sera évidemment valable sur l'axe réel, qui joue le rôle d'une paroi.

A ces conditions s'ajoute la *condition de détachement*

$$\frac{d(\delta\psi)}{d\varphi} = 0 \quad \text{pour } f = f_0 \quad (12)$$

qui est restée longtemps cachée, bien qu'elle dérive de l'identité fondamentale. La condition (12) exprime le fait que la ligne

libre variée se détache du même point  $z_0$  que la ligne supposée donnée.

Notre but est de démontrer que l'ensemble de ces conditions aux limites (10), (11) et (12) a pour conséquence l'équation

$$\delta f \equiv 0 \quad (\text{Problème de l'unicité infinitésimale, ou Problème I}).$$

Ce but n'a pu être atteint que par un détour: Faisons l'hypothèse que la variation inconnue  $\delta\mu$  est égale à zéro. On obtient alors un nouveau *Problème II* qui est plus simple que le Problème I, mais dont le caractère est artificiel. En effet, en posant *a priori*  $\delta\mu = 0$ , on se limite à la considération d'une classe particulière de solutions infiniment voisines de la solution donnée. Ce sont les solutions, auxquelles correspondent non seulement les mêmes parois, mais aussi la même constante quasi-isométrique  $\mu$ . Cette restriction est tout à fait arbitraire, car  $\mu$  n'est pas donné. L'étude du *Problème II (d'unicité infinitésimale au sens restreint)* sera justifiée uniquement par son utilité pour la résolution du Problème I.

Désignons, pour abrégier l'écriture, la variation  $\mu\delta\psi$  dans le Problème II par  $\beta$ . La fonction harmonique  $\beta$  satisfait dans la bande B aux conditions aux limites qui s'obtiennent en posant  $\delta\mu = 0$  dans les conditions du Problème I. On aura

$$\beta = 0 \quad \text{sur le segment } \bar{\omega} \text{ et sur l'axe réel} \quad (13)$$

$$\frac{d\beta}{dn} = c\beta \quad \text{sur le segment } \lambda \quad (14)$$

Le Problème II consiste à démontrer que  $\beta$  est identiquement nul. La fonction  $c = c(\varphi)$  y désigne comme précédemment la courbure de la ligne libre de la solution dont nous avons admis l'existence. En général  $c$  ne sera pas une fonction explicitement connue, mais l'intégrale générale du problème nous donne des renseignements précieux sur l'allure de la ligne libre correspondant à une paroi donnée. Ainsi on sait, par exemple (Théorème de M. Boggio), que cette ligne sera convexe si la paroi est concave. Ces renseignements permettent de formuler les résultats sur l'unicité en n'utilisant strictement que les données du problème.

La condition (13) paraît à première vue être identique à celle que Fourier a étudié dans la Théorie de la Chaleur. En réalité elle s'en distingue nettement par le *signe* de la fonction  $c$ : ce signe, qui est toujours *négalif* dans le cas de la Théorie de la Chaleur, est, par contre, toujours *positif* dans le cas le plus important de la théorie des jets, celui des jets à parois concaves vers le courant.

En tenant compte des conditions aux limites on obtient par la formule de Green pour  $\beta$  l'équation

$$\int_B \int \left\{ \left( \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} \right)^2 + \left( \frac{\partial \beta}{\partial \psi} \right)^2 \right\} d\varphi d\psi - \int_\lambda c \beta^2 ds = 0. \quad (15)$$

Le premier membre de cette équation serait dans le cas de Fourier la *somme* de deux quantités positives. On aurait donc immédiatement  $\beta \equiv 0$ . Or, dans notre cas ce premier membre est la *différence* de deux grandeurs positives, de sorte que l'équation (15) ne semble nous donner aucun renseignement sur  $\beta$ .

On a réussi quand même à utiliser l'équation (15) pour démontrer que  $\beta$  *s'annule identiquement pour certaines classes de parois*. Depuis la première démonstration de ce théorème en 1923<sup>1</sup> MM. HAMEL<sup>2</sup>, WEYL<sup>3</sup> et FRIEDRICHS<sup>4</sup> ont successivement donné des démonstrations sous des hypothèses de plus en plus générales. Le but de ces démonstrations est de prouver que le premier membre de (15) pris en lui-même, est toujours positif, sauf pour  $\beta \equiv 0$ . En 1933, M. Friedrichs a réussi à mettre ce fait en évidence en transformant le premier membre de (15) en une somme de deux carrés. La transformation de M. Friedrichs est valable dans tous les cas où se trouve vérifiée la condition suivante: il existe une fonction harmonique  $U$  qui ne s'annule jamais dans le domaine  $D$  et qui satisfait sur  $\lambda$  à la condition intrinsèque (14) du Problème II:  $dU/dn = cU$ . En admettant

<sup>1</sup> A. WEINSTEIN, l. c., 114. — Ein hydrodynamischer Unitätssatz. *Math. Zeitschrift*, t. 19, 1924, p. 265.

<sup>2</sup> G. HAMEL, Über einen hydrodynamischen Unitätssatz des Herrn Weinstein. *Résumés des Conférences du Deuxième Congrès international de Mécanique appliquée*, Zürich, 1926, p. 76. — Ein hydrodynamischer Unitätssatz. *C. R. du Deuxième Congrès international de Mécanique appliquée*, Zurich, 1927.

<sup>3</sup> H. WEYL, Strahlbildung, nach der Kontinuitätsmethode behandelt. *Göttinger Nachrichten*, 1927, p. 227.

<sup>4</sup> K. FRIEDRICHS, Ueber ein Minimumproblem für Potentialströmungen mit freiem Rande. *Math. Ann.*, t. 109, 1933, p. 60.

l'existence d'une telle fonction on aura en posant dans (15)  $\beta = U\eta$  (principe de variation multiplicative de Jacobi) l'équation

$$\int_B \int U^2 (\eta_\varphi^2 + \eta_\psi^2) d\varphi d\psi = 0 \quad (16)$$

qui donne immédiatement l'équation  $\beta \equiv 0$ .

Examinons maintenant la question de l'existence de la fonction  $U$  de M. Friedrichs. On vérifie immédiatement, par différentiation <sup>1</sup>, que les composantes de la vitesse  $u = e^\tau \cos \theta$  et  $v = e^\tau \sin \theta$  satisfont à la condition (14) sur  $\lambda$ . Il suffit donc de s'assurer qu'une composante quelconque de la vitesse  $U = au + bv$  ( $a^2 + b^2 = 1$ ,  $a$  et  $b$  étant constants) ne s'annule pas dans  $D$ , pour en déduire l'équation  $\beta \equiv 0$ . Par conséquent le procédé de M. Friedrichs démontre l'unicité infinitésimale au sens restreint pour une classe très vaste de parois, en particulier pour toutes les parois concaves, pour lesquelles la variation totale de la direction de la tangente (« courbure totale de la paroi ») n'est pas supérieure à  $\pi$ .

*Considérons dorénavant uniquement des parois pour lesquelles le Problème auxiliaire II est supposé résolu, c'est-à-dire pour lesquelles le théorème d'unicité infinitésimale au sens restreint est supposé démontré. (Nous ne nous préoccupons pas de la question encore non tranchée de savoir quelles sont toutes les parois pour lesquelles ce théorème est vrai). La condition de détachement (12) permet alors de démontrer pour les mêmes parois l'unicité infinitésimale (Problème I) sans aucune restriction arbitraire. Cette réduction du Problème I au Problème II a été longtemps une difficulté principale de la théorie. Le temps me manque pour donner des détails de cette réduction qui a été effectuée d'abord pour des parois concaves <sup>2</sup>. La démonstration donnée dans ce cas peut être interprétée de la manière suivante: Si une variation quelconque de la paroi donnée conserve la direction de cette paroi au (nouveau) point de détachement  $z_0 + \delta z_0 = i(y_0 + \delta y_0)$ , le signe de la variation  $\delta\mu$  sera égal au signe de la variation  $\delta y_0$*

<sup>1</sup> Cette simple démonstration des équations  $du/dn = cu$  et  $dv/dn = cv$  m'a été communiquée par M. C. Jacob.

<sup>2</sup> A. WEINSTEIN, Sur le théorème d'existence des jets liquides. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1927, p. 157.

du point de détachement. (C'est-à-dire que le débit augmente avec l'orifice). Par conséquent l'invariance de la paroi implique l'égalité  $\delta\mu = 0$  et on retrouve ainsi pour le Problème I les conditions aux limites du Problème II. Récemment, M. LERAY a étendu ces résultats aux parois non concaves en introduisant dans le Problème I au lieu de l'inconnue  $\delta\psi$  la fonction  $\beta^* = \delta\psi + \left(\psi - \frac{\pi}{2}\right) \delta \log \mu$ . On a pour  $\beta^*$  les conditions aux limites suivantes qui se déduisent de (10), (11) et (12):

$$\frac{d\beta^*}{dn} = c\beta^* \quad \text{sur le segment } \lambda \quad (10')$$

$$\beta^* = 0 \quad \text{sur le segment } \varpi \quad (11')$$

$$\beta^* = -\frac{\pi}{2} \delta \log \mu \quad \text{sur l'axe réel} \quad (11'')$$

$$\frac{d\beta^*}{d\varphi} = 0, \quad \frac{d\beta^*}{d\psi} = 0 \quad \text{au point de détachement } f_0. \quad (12')$$

Les conditions (12') nous montrent l'existence d'une ligne  $\beta^* = 0$ , différente du segment  $\varpi$ , passant par le point de détachement. Trois cas pourraient alors se présenter: cette ligne pourrait rencontrer soit  $\varpi$ , soit l'axe réel, soit  $\lambda$ . Dans le premier cas on trouverait immédiatement  $\beta^* \equiv 0$ . Dans le second cas on aurait  $\delta\mu = 0$  et, par conséquent,  $\beta^*$  satisferait aux conditions du Problème II, ce qui donnerait de nouveau  $\beta^* \equiv 0$ . Enfin, dans le troisième cas, la fonction  $\beta^*$  satisferait aux conditions aux limites du Problème II sur les frontières d'un certain domaine partiel  $B^*$  de  $B$  et on arriverait à la même conclusion:  $\beta^* \equiv 0$ . Il va sans dire que le Problème II pour le domaine  $B^*$  ne peut plus être interprété comme un problème d'unicité infinitésimale.

Je me suis jusqu'à présent limité à un aperçu du problème de l'unicité infinitésimale. J'aborde maintenant la question de l'existence des solutions des problèmes posés par la théorie de Helmholtz. Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, cette question doit être traitée avant le problème de l'unicité absolue (unicité dans le sens usuel de ce mot) <sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Signalons que M. Friedrichs (l. c., 117) a démontré l'unicité absolue *au sens restreint*, c'est-à-dire en supposant  $\mu$  fixe. La solution supposée donnée fournit dans ce cas le minimum absolu de l'intégrale  $\int_D (\psi_x^2 + \psi_y^2 + 1) dx dy$ , car la seconde variation de cette expression est égale à la moitié du premier membre de l'équation (16) ou (15).

Les théorèmes d'existence ont été démontrés par des *procédés de continuité*. Nous avons vu que la recherche d'une solution pour des parois données se ramène en principe à la recherche d'une fonction inconnue  $\omega(f)$  appartenant à la classe des fonctions étudiées dans la théorie de l'intégrale générale. Les fonctions de cette classe dépendent en général d'une *infinité de paramètres*. Ces paramètres sont les coefficients arbitraires des séries de M. Levi-Civita ou bien les coefficients de Fourier de la fonction arbitraire qui intervient dans l'intégrale de M. Villat. Le problème de l'existence est donc équivalent à la détermination de ces paramètres.

Considérons d'abord le cas d'une *paroi polygonale donnée*. Désignons ses sommets par  $z_0 = iy_0, z_1, z_2, \dots, z_n (z_k = x_k + iy_k)$ . M. CISOTTI a démontré en 1908<sup>1</sup> que la fonction  $\omega$  ne dépend dans ce cas que d'un nombre *fini* de paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}$  en nombre égal à celui des coordonnées des sommets. L'ensemble des valeurs que peuvent prendre ces paramètres peut être représenté par les points d'un certain domaine d'un espace à  $2n + 1$  dimensions. Les coordonnées des sommets:  $y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n$  sont des fonctions explicitement données du point  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}$ . Le *théorème d'existence* affirme qu'il existe un ou plusieurs points  $(\alpha)$  correspondants à des valeurs des  $(x_k, y_k)$  données.

Ce théorème a été démontré par la *méthode de continuité* classique<sup>2</sup>. Le temps me manque pour donner un aperçu de cette méthode, employée pour la première fois, en 1874, dans un problème de représentation conforme, par le mathématicien bernois SCHLÄFLI. Il nous suffit pour les applications de savoir qu'elle fournit l'énoncé de conditions suffisantes pour assurer l'existence des solutions d'un nombre fini d'équations transcendentes, telles que

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}) \\ y_k &= y_k(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}) \\ y_0 &= y_0(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}) \end{aligned} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

<sup>1</sup> U. CISOTTI, Vene fluenti. *Rend. d. Circ. Mat. d. Palermo*, t. 25, 1908, p. 145.

<sup>2</sup> A. WEINSTEIN, l. c., p. 118.

où le nombre des équations est égal au nombre des paramètres. La démonstration par continuité se réduit dans notre cas, comme dans toutes les applications, à établir les théorèmes suivants :

1. *Le déterminant fonctionnel*

$$\frac{\partial (y_0, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)}{\partial (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1})}$$

est toujours différent de zéro. Ce théorème est vrai ici puisqu'il exprime le théorème de l'unicité infinitésimale.

2. *Existence des limitations a priori.* On peut affirmer *a priori* que les paramètres inconnus  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n+1}$  restent entre certaines limites données, si l'on se donne les limites pour les valeurs de  $(x_k, y_k)$ . Ce fait peut être déduit, pour toutes les parois à courbure totale non supérieure à  $\pi$ , des formules explicites de M. Cisotti, qui donnent les  $(x_k, y_k)$  en fonctions des  $\alpha_k$ .

La méthode de continuité permet de déduire de 1. et 2. que notre *problème du jet à paroi polygonale admet au moins une solution*. Il est aisé à prévoir que cette solution sera unique dans le cas banal où tous les sommets  $z_0, z_1, \dots, z_n$  se trouvent sur la même droite parallèle à l'axe réel (paroi rectiligne). Ce dernier fait s'ajoutant aux résultats précédents permet de déduire l'*unicité absolue* de la solution pour une paroi polygonale quelconque<sup>1</sup>. En effet on peut démontrer par un raisonnement classique que l'existence de *deux* solutions différentes pour une même paroi donnée aurait pour conséquence l'existence d'un point de ramification des solutions. Or, ce fait serait en contradiction avec le théorème de l'unicité infinitésimale.

En résumé *l'existence et l'unicité* de la solution est établie pour le problème du *jet symétrique à paroi polygonale donnée*, de courbure totale inférieure à  $\pi$ .

L'*existence* des solutions correspondantes aux *parois curvilignes* a pu être établi par un *passage à la limite*<sup>2</sup>, en approchant la

<sup>1</sup> J. LERAY et A. WEINSTEIN, Sur un problème de représentation conforme posé par la théorie de Helmholtz. *C. R.*, 1934, p. 429.

<sup>2</sup> A. WEINSTEIN, Zur Theorie der Flüssigkeitsstrahlen. *Math. Zeitsch.*, t. 31, 1929, p. 424.



paroi donnée par des parois polygonales. Toutefois, ce procédé ne fournit pas l'unicité absolue de la solution.

Les problèmes posés par la théorie de Helmholtz, en particulier le problème du *sillage* en présence d'un *obstacle curviligne*, ont été récemment l'objet d'une *étude directe*, qui fait intervenir la théorie récente de la résolution des *équations fonctionnelles non linéaires*. La différence entre cette nouvelle méthode et la précédente est peut-être plus apparente que réelle. En effet, la résolution de ces équations se fait elle-même en raisonnant par continuité dans un domaine fonctionnel. Les théorèmes dans le domaine fonctionnel s'obtiennent par un passage à limite préalable à partir des théorèmes relatifs à l'espace à un nombre fini de dimensions.

Je me permets de donner quelques indications très sommaires sur ce développement tout à fait récent de la théorie. Nous avons vu à plusieurs reprises que la résolution d'un problème quelconque de Helmholtz revient à la détermination de la fonction  $\omega(f) = \theta + i\tau$  introduite par M. Levi-Civita. La partie réelle  $\theta$  de cette fonction donne la direction de la vitesse. Considérons un *obstacle curviligne donné*. Sa courbure  $d\theta/ds$  sera une fonction  $c(\theta)$  donnée de la direction  $\theta$  de la tangente à l'obstacle. On aura donc sur le segment  $\varpi$  du plan  $f$  l'équation  $d\theta/ds = c(\theta)$ , c'est-à-dire

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{d\varphi} = c(\theta) \frac{ds}{d\varphi} \quad (17)$$

On peut exprimer  $ds/d\varphi$  par les fonctions (inconnues)  $\theta$  et  $\tau$ . Par conséquent on aura une relation de la forme  $\frac{ds}{d\varphi} = h(\theta, \tau, \varphi)$  où  $h$  est une fonction donnée. L'équation (17) peut être écrite alors de la façon suivante

$$\frac{d\theta}{d\varphi} = h(\theta, \tau, \varphi) c(\theta) \quad (18)$$

Cette équation, indiquée en 1907 par M. Levi-Civita, lie sur  $\varpi$  les parties réelle et imaginaire de la fonction  $\omega$  correspondante à un obstacle donné. M. Villat a proposé en 1912 d'éliminer  $\theta$

en se servant de la formule de Green-Dini. En 1931, M. QUARLERI<sup>1</sup> a proposé d'éliminer, toujours en se servant de la même formule, la fonction  $\tau$  et de ramener ainsi l'étude du problème à la résolution d'une équation intégrale non linéaire. Malheureusement son procédé a donné lieu à des objections et il a fallu y apporter plusieurs modifications essentielles.

Je me permets d'écrire les équations finales auxquelles se ramène le problème du sillage dans le cas le plus simple<sup>2</sup>: l'obstacle donné sera un arc de cercle de rayon unité. On aura dans ce cas  $c(\theta) \equiv 1$ .

Il est plus commode d'introduire dans (18) au lieu de  $f$  une nouvelle variable indépendante  $\zeta$  en représentant conformément le plan  $f$  (entaillé le long de l'axe des  $\varphi$  positifs) sur un demi-cercle de rayon 1 dans le plan  $\zeta = \rho e^{i\sigma}$ . Dans cette correspondance l'obstacle aura pour image la demi-circonférence  $|\zeta| = 1$  (*Transformation de M. Levi-Civita*). On aura sur cette demi-circonférence la condition suivante déduite de l'équation (18)

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = -\frac{d\tau}{dn} = \mu g(\sigma) e^{-\tau} \quad (19)$$

où  $g(\sigma)$  désigne une fonction explicitement connue et où  $\mu$  joue le rôle de la constante quasi-isométrique. La formule classique de Green-Dini permet de transformer cette condition en une équation intégrale non linéaire. Sous sa forme définitive cette équation peut s'écrire comme il suit

$$t(\sigma) = \mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} N(\sigma, \sigma^*) e^{-t(\sigma^*)} d\sigma^* . \quad (20)$$

L'inconnue  $t(\sigma)$  est liée d'une façon élémentaire à la fonction  $\tau$ . Le « noyau »  $N$  de cette équation est *positif*. Le problème consiste à résoudre cette équation et à montrer qu'on peut

<sup>1</sup> A. QUARLERI, Sulla teoria della scia nei liquidi perfetti. Caso del cilindro rotondo. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1931, p. 332. Une autre tentative de résoudre les problèmes de Helmholtz a été faite par M. C. SCHMIEDEN (*Ingenieur-Archiv*, 1932, p. 368, 1934, p. 373), mais son raisonnement contient des erreurs.

<sup>2</sup> A. WEINSTEIN, Sur les sillages provoqués par des arcs circulaires. *Rend. d. R. Acc. d. Lincei*, 1933, p. 83. — Sur les points de détachement des lignes de glissement. *C. R.*, 1933, p. 324.

disposer du paramètre  $\mu$  de manière à avoir dans le plan  $z$  un *arc donné* du cercle de rayon 1<sup>1</sup>. Les premiers résultats concrets obtenus par cette nouvelle voie étaient les suivants: Le théorème d'existence a été démontré pour des arcs inférieurs à 40°. Quelque temps après, M. Leray a repris la question du sillage non seulement pour les arcs de cercle, mais pour des obstacles curvilignes quelconques. M. Leray a démontré que les équations du problème (par exemple l'équation (20)) appartiennent à la classe d'équations fonctionnelles étudiées par lui-même en collaboration avec M. SCHAUDER<sup>2</sup>. Leur méthode, qui est précisément une sorte de méthode de continuité dans le domaine fonctionnel, résout la question de l'existence *indépendamment de la question de l'unicité* des solutions. Je dois me borner à citer une partie des résultats de M. LERAY<sup>3</sup>:

*Le théorème d'existence dans la théorie des sillages est établi pour toute courbe-obstacle, dont les points ont toujours des ordonnées différentes, sauf si le segment qui les joint appartient à la courbe.*

Pour étudier l'unicité (infinitésimale et absolue) il faut former les « équations aux variations » des équations fonctionnelles. Il est aisé à prévoir qu'on retrouve par cette voie des problèmes d'unicité du genre étudié plus haut. M. Leray démontre l'*unicité absolue des sillages symétriques* correspondant à des *obstacles symétriques* ainsi que l'unicité du sillage correspondant à un *obstacle disymétrique convexe*, tous ces obstacles appartenant, bien entendu, à la classe définie plus haut.

Dans le cas particulier du cercle, le théorème d'existence et l'unicité de la solution ont été démontrés par M. Leray pour un *arc quelconque*: la grandeur de l'arc-obstacle est une fonction croissante de  $\mu$ . M. JACOB a récemment retrouvé cette propriété de monotonie de l'arc-obstacle par une voie élémentaire<sup>4</sup>. Signalons

<sup>1</sup> M. J. SEKERJ-ZENKOWITCH, à l'attention duquel ont échappé les travaux cités dans la note précédente, a repris récemment (*C. R. de l'Académie des Sciences de l'URSS*, 1934, p. 373; 1935, p. 151) l'étude des problèmes de Helmholtz. Toutefois cet auteur omet de traiter la question essentielle de la détermination de  $\mu$ .

<sup>2</sup> J. LERAY et J. SCHAUDER, Topologie et équations fonctionnelles. *Annales de l'Ec. Normale*, 1934, p. 45.

<sup>3</sup> J. LERAY, Les problèmes de représentation conforme de Helmholtz; théorie des sillages et des proues. *C. R.*, 1934, p. 1282 — *C. R.*, 1935, p. 2007. — *Comm. Math. Helvetici*, Vol. 8, 1935/36, p. 149 et p. 250. — J. KRAVTCHENKO, *C. R.*, 1936, p. 276.

<sup>4</sup> C. JACOB, Thèse, Paris, 1935 (*Mathematica*, 1935).

enfin que l'existence des solutions de l'équation (20) pour le cas du cercle se déduit, indépendamment des méthodes de continuité, du « Fixpunktsatz » de M. Schauder <sup>1</sup>.

Le cas du cercle nous montre qu'il est possible de lever parfois les restrictions imposées aux parois et aux obstacles. Les problèmes qui se posent ainsi paraissent dignes d'attirer l'attention des chercheurs.

J'arrive à la fin de mon bref aperçu. A mon grand regret, le manque de temps ne m'a pas permis d'insister davantage ni sur des travaux aujourd'hui classiques <sup>2</sup>, ni sur des recherches tout à fait récentes. J'ai dû restreindre ma tâche à l'énoncé de quelques problèmes d'une théorie qui a commencé par des résultats modestes, mais qui, grâce aux travaux de plusieurs mathématiciens, opère aujourd'hui dans un champ très vaste.

---

<sup>1</sup> J. SCHAUDER, *Studia Mathematica*, t. 2, 1930, p. 170. On peut utiliser aussi des théorèmes de M. A. HAMMERSTEIN, *Nichtlineare Integralgleichungen*, *Acta Math.* 1930, p. 122. Signalons enfin que M. S. BRODETSKY avait dès 1922 donné d'excellentes solutions approchées du problème, l'obstacle étant circulaire ou elliptique. Voir p. ex. *C. R. du Deuxième Congrès international de Mécan. appliquée*. Zurich, 1927.

<sup>2</sup> Voir, par exemple, les Traités suivants: H. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides* (Coll. *Scientia*, Paris, 1920). — U. CISOTTI, *Idromeccanica piana* (Milano, 1921).