Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES
Autor: SCHAUDER, J.
Kapitel: IV.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27308

Ce raisonnement reste valable pour l'équation plus générale

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \Sigma b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f \,. \tag{21}$$

Passons maintenant à la limitation dans *le voisinage de la frontière.* Il faut alors ajouter à nos hypothèses la supposition suivante:

Dans un voisinage U d'une portion H de la frontière [1] les dérivées secondes de u satisfont à la condition [2] de Hölder ; $\|u\|^{\mathrm{U}}_{\alpha,2} < \infty$. φ étant les valeurs aux limites, nous prouvons, par un procédé tout à fait semblable au précédent, une limitation pour $\|u\|^{\mathrm{U}'}_{\alpha,2}$ dans chaque domaine U′ intérieur à U. Il suffit de transformer H en un hyperplan H′ et d'appliquer les limitations précédentes [3].

IV.

Nous démontrerons maintenant qu'on peut *déduire les théorèmes d'existence des limitations précédentes.* Commençons par l'équation

$$\mathrm{L}(u) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = f \tag{22}$$

et par des valeurs aux limites ayant des dérivées secondes Hölderiennes (problème de Dirichlet).

Envisageons l'ensemble d'équations du type elliptique dépendant d'un paramètre λ

$$\Sigma a_{ik}^{(\lambda)} \frac{\partial^2 u^{(\lambda)}}{\partial x_i \partial x_k} = f \tag{23}$$

et telles que l'on ait $a_{ik}^{(0)} = \delta_{ik}$ (symbole de Kronecker), mais $a_{ik}^{(1)} = a_{ik}$. Pour $\lambda = 0$ nous obtenons alors l'équation de Poisson

$$\Delta u^{(0)} = f$$

---

1 Voir note 1, p. 129.

2 C'est-à-dire les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder dans l'ensemble envisagé.

3 Voir l'inégalité (8).

et pour $\lambda = 1$ l'équation donnée (22). On voit tout de suite que tous les coefficients $a_{ik}^{(\lambda)}$ satisfont à la même condition de Hölder, c'est-à-dire que leurs normes hölderiennes toutes ensembles sont bornées. Pour $\lambda = 0$ notre équation est résoluble et en plus $u^{(0)}$ (c'est-à-dire sa solution pour $\lambda = 0$) satisfait ainsi que ses dérivées premières et secondes à la condition de Hölder: $\| u^{(0)} \|_{\alpha, 2}^{G} < \infty$. La méthode des approximations successives (employée pour ce problème déjà par M. Korn) démontre aisément l'existence de la solution pour λ voisin de 0 et il résulte de la démonstration que $\| u^{(\lambda)} \|_{\alpha,2}^{G} < \infty$. D'ailleurs cette démonstration devient vraiment banale si l'on se sert des notations de la théorie des opérations fonctionnelles. L'équation étant résoluble pour λ_0 nous pouvons de même établir l'existence des solutions $u^{(\lambda)}$ pour un λ voisin de λ_0 en *restant* toujours *dans la classe* de fonctions dont les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder. La limitation *uniforme* $\| u^{(\lambda)} \|_{\alpha, 2}^{G} < C$ reste valable pour toutes les solutions $u^{(\lambda)}$; on en déduit la résolubilité de (23) pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire celle de (22). En plus $u^{(1)} = u$ appartient à la classe envisagée, ce qui veut dire que ses dérivées secondes satisfont dans $G + S$ à une condition de Hölder. J'attire votre attention sur la façon extrêmement simple par laquelle notre procédé fournit l'allure de la fonction u. La transition aux valeurs aux limites continues seulement est maintenant immédiate; on applique les limitations précédentes valables pour les domaines fermés $\overline{G}$ contenus [1] dans G.

V.

Notre procédé est également simple dans le cas de l'équation plus générale

$$K(u) = \Sigma a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \Sigma b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f \,. \tag{24}$$

[1] C'est la conséquence des limitations fondamentales du paragraphe précédent; il s'agit d'une évaluation qui permet de majorer $\| u \|_{\alpha, 2}^{\overline{G}}$ seulement par $\operatorname{Max}_{G} |u|$ dans chaque domaine fermé $\overline{G}$ situé à l'intérieur de G.