

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES
Autor: SCHAUDER, J.
Kapitel: V.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27308>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

et pour $\lambda = 1$ l'équation donnée (22). On voit tout de suite que tous les coefficients $a_{ik}^{(\lambda)}$ satisfont à la même condition de Hölder, c'est-à-dire que leurs normes hölderiennes toutes ensemble sont bornées. Pour $\lambda = 0$ notre équation est résoluble et en plus $u^{(0)}$ (c'est-à-dire sa solution pour $\lambda = 0$) satisfait ainsi que ses dérivées premières et secondes à la condition de Hölder: $\|u^{(0)}\|_{\alpha, 2}^G < \infty$. La méthode des approximations successives (employée pour ce problème déjà par M. Korn) démontre aisément l'existence de la solution pour λ voisin de 0 et il résulte de la démonstration que $\|u^{(\lambda)}\|_{\alpha, 2}^G < \infty$. D'ailleurs cette démonstration devient vraiment banale si l'on se sert des notations de la théorie des opérations fonctionnelles. L'équation étant résoluble pour λ_0 nous pouvons de même établir l'existence des solutions $u^{(\lambda)}$ pour un λ voisin de λ_0 en *restant* toujours dans la classe de fonctions dont les dérivées secondes satisfont à la condition de Hölder. La limitation *uniforme* $\|u^{(\lambda)}\|_{\alpha, 2}^G < C$ reste valable pour toutes les solutions $u^{(\lambda)}$; on en déduit la résolubilité de (23) pour $\lambda = 1$, c'est-à-dire celle de (22). En plus $u^{(1)} = u$ appartient à la classe envisagée, ce qui veut dire que ses dérivées secondes satisfont dans $G + S$ à une condition de Hölder. J'attire votre attention sur la façon extrêmement simple par laquelle notre procédé fournit l'allure de la fonction u . La transition aux valeurs aux limites continues seulement est maintenant immédiate; on applique les limitations précédentes valables pour les domaines fermés \bar{G} contenus¹ dans G .

V.

Notre procédé est également simple dans le cas de l'équation plus générale

$$K(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu = f. \quad (24)$$

¹ C'est la conséquence des limitations fondamentales du paragraphe précédent; il s'agit d'une évaluation qui permet de majorer $\|u\|_{\alpha, 2}^{\bar{G}}$ seulement par $\text{Max}_G |u|$ dans chaque domaine fermé \bar{G} situé à l'intérieur de G .

L'emploi des équations intégrales n'est plus nécessaire ni la construction de la fonction de Green. Posons

$$L(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \Psi. \quad (25)$$

u est alors une *opération fonctionnelle* $F(\Psi)$ de Ψ et l'équation (24) prend la forme

$$\Psi + \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} [F(\Psi)] + cF(\Psi) = f. \quad (26)$$

En introduisant la notation

$$W(\Psi) = \sum b_j \frac{\partial}{\partial x_j} F(\Psi) + cF(\Psi), \quad (27)$$

nous avons

$$\Psi + W(\Psi) = f. \quad (28)$$

Nos limitations prouvent que $W(\Psi)$ est une opération linéaire *complètement continue* à laquelle est alors applicable la théorie développée en 1915 par M. F. RIESZ. On en déduit immédiatement l'alternative suivante: l'équation non homogène (24) est toujours résoluble ou bien l'équation homogène admet une solution non nulle s'annulant sur la frontière.

VI.

Remarquons encore que ce procédé permet de traiter l'équation (24) pour des coefficients continus seulement et même bornés. J'ai démontré le résultat en question dans une note dans les *C. R. de l'Acad. des Sciences*, décembre 1934. Pour le moment je me borne au cas de dimensions $n = 2$. La fonction u est continue¹, ses dérivées premières et secondes existent presque partout et l'équation (24) est valable seulement dans ce sens.

¹ u satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\frac{1}{2}$ et ses dérivées premières satisfont à cette condition sur presque chaque droite parallèle à une direction arbitrairement fixée.