Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: ÉQUATIONS DU TYPE ELLIPTIQUE, PROBLÈMES LINÉAIRES

Autor: SCHAUDER, J.

Kapitel: VIII.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27308

effectuée sur ρ satisfait à la condition de Hölder (ce qui se prouve à l'aide de méthodes très simples, employées déjà dans la théorie du potentiel).

β) Le noyau $\lambda(X, E)$ est singulier et d'ordre $r^{n-\alpha}$, où r désigne la distance des deux points X, E.

Il est une conséquence de la condition β) que les ordres des noyaux itérés

$$\lambda^{(1)} = \lambda\,,\ \lambda^{(2)},\ \lambda^{(3)},\ \ldots\ ,\ \lambda^{(i-1)},\ \lambda^{(i)},\ \ldots$$

diminuent successivement et soient bornés à partir d'un indice suffisamment élevé $i - 1$. A cause de α) $\lambda^{(i)}(X, E)$ satisfait à une condition de Hölder par rapport à la première variable X. Envisageons

$$\mathrm{R}'(\mathrm{X}, \mathrm{E}) = \left[\mathrm{R}(\mathrm{X}, \mathrm{E})\right]^{\frac{2-n}{2}} + \mu \int_{\Omega^*}\!\!\!\ldots\!\int \mathrm{R}^{\frac{2-n}{2}}\, \lambda(\overline{\mathrm{E}}, \mathrm{E})\, d\tau_{\overline{\mathrm{E}}} + \ldots$$

$$\ldots + \mu^{i-1} \int_{\Omega^*}\!\!\!\ldots\!\int \mathrm{R}^{\frac{2-n}{2}}\, \lambda^{(i-1)}(\overline{\mathrm{E}}, \mathrm{E})\, d\tau_{\overline{\mathrm{E}}}\,. \tag{35}$$

En vertu de (32) nous avons

$$\mathrm{K_X R'}(\mathrm{X}, \mathrm{E}) = \mu^i \lambda^{(i)}(\mathrm{X}, \mathrm{E})\,.$$

Supposons maintenant que le point E, qui joue le rôle d'un pôle, soit fixe à l'intérieur de Ω. E restant constant, la fonction R′ (X, E) est continue sur la frontière de Ω. Considérons dans Ω une solution u de l'équation

$$\mathrm{K_X}\, u = -\,\mu^i \lambda^{(i)}\,, \quad \text{E constant}$$

les valeurs aux limites étant — R′ (X, E). La fonction $\mathrm{R}' + u = \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$ est la fonction de Green cherchée s'annulant sur la frontière de Ω.

VIII.

Les évaluations obtenues précédemment qui ont été le point de départ de nos recherches mènent immédiatement à des limitations importantes de la fonction de Green G (X, E) et de ses dérivées premières et secondes. Par exemple: dans le domaine Ω_δ à distance δ du pôle les limitations

$$\left\|G\right\|_{\alpha,2}^{\Omega_\delta} \leq \frac{C_1(M)}{\delta^{n+\alpha}} \; ; \quad \left\|G\right\|_{\alpha,1}^{\Omega_\delta} \leq \frac{C_2(M)}{\delta^{n+\alpha-1}}$$

sont valables. Dans les normes $\| \; \|$ la dérivation s'effectue toujours par rapport au premier point X. On peut d'ailleurs démontrer facilement certaines conditions de Hölder relativement au point E. (On calcule facilement les valeurs de $C_1(M)$ et $C_2(M)$.) On traite aussi aisément le problème de Neumann et ses généralisations [1].

IX.

J'ai tâché de montrer comment on cherchait les solutions des équations linéaires du type elliptique par une voie directe. Il est vraisemblable que cette méthode pourrait aussi rendre service pour des autres types d'équations. Je veux encore indiquer de récents résultats d'autres auteurs, mais seulement des résultats obtenus pendant les derniers mois.

Avant tout, ce sont les nouveaux travaux de M. Giraud qui cherche à résoudre l'équation (24), étant donnée sur la frontière la valeur de la dérivée dans une direction arbitraire non tangente et d'ailleurs pouvant varier d'un point à l'autre. On ramène le problème à une équation intégrale, mais l'ordre du noyau $\lambda(X, E)$ est trop élevé et l'intégrale $\int\int \lambda(X, E)\, \rho(E)\, d\tau_E$ doit être calculée dans le sens de Cauchy. On ne peut pas utiliser directement la théorie de Fredholm. M. Giraud a développé la théorie [2] de ces équations intégrales singulières.

On peut étendre aux équations linéaires du type elliptique général du second ordre les recherches que M. Vasilesco vous a exposées ce matin. Le résultat capital en est le suivant: les

[1] Je ne donne pas ici les calculs en question pour que la conférence ne soit pas trop longue. Ils sont maintenant très simples, car nous pouvons (v. §§ VII et VIII) construire la fonction de Green et limiter ses dérivées d'une façon très brève. Je montrerai cela dans un travail qui paraîtra bientôt.

[2] Voir *Ann. de l'Ec. Norm. Sup.*, 1935.