

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES PROBLÈMES NON LINÉAIRES  
**Autor:** Leray, Jean  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27309>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

points irréguliers sont les mêmes qu'il s'agisse de l'équation de Laplace ou de l'équation générale linéaire <sup>1</sup>.

Pour terminer je voudrais remarquer que, à l'exception d'un travail de E. E. LEVI fait en 1910, je ne connais point de nouvelles recherches sur l'équation du type elliptique d'ordre  $2p$  ( $p > 1$ ) ni sur des systèmes d'équations (évidemment quelques généralisations faciles sont possibles). Je crois alors que les futurs efforts devraient aller dans cette direction-là.

---

## LES PROBLÈMES NON LINÉAIRES <sup>2</sup>

PAR

Jean LERAY (Paris).

---

### I. — GÉNÉRALITÉS CONCERNANT LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES NON LINÉAIRES.

1. — *Un type particulièrement simple d'espaces abstraits : ceux de M. BANACH.* — Nous envisageons des problèmes dont l'inconnue est un point  $x$  d'un *espace fonctionnel donné*,  $\mathcal{E}$ .

Nous supposons que  $\mathcal{E}$  est un espace abstrait de Banach : on peut combiner linéairement ses points ; une distance est définie ; la distance  $\|x\|$  qui sépare l'origine du point  $x$  est nommée norme de  $x$  ; on a,  $\lambda$  étant une constante réelle,  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

$\mathcal{E}$  sera par exemple l'espace des fonctions continues, l'espace de Hilbert, l'espace des fonctions hölderiennes d'exposant  $\alpha$ , l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont hölderiennes et d'exposant  $\alpha$  ;  $\mathcal{E}$  pourra être éventuellement un espace euclidien.

---

<sup>1</sup> Voir par exemple TAUTZ, *Math. Zeitschr.* Bd. 29, 1935.

<sup>2</sup> Conférence faite le 19 juin 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève ; série consacrée aux *Equations aux dérivées partielles. Conditions propres à déterminer les solutions.*

En général un tel espace n'est pas compact : un domaine borné de  $\mathcal{E}$  ne peut être recouvert à l'aide d'un nombre fini d'hypersphères de rayon  $\varepsilon$ . Par exemple il est impossible de trouver un système, constitué par un nombre fini de fonctions continues, qui présente le caractère suivant : toute fonction continue, dont la plus grande valeur absolue est inférieure à 1, est approchée à  $1/10$  près par un élément au moins de ce système. Un espace qui n'est pas compact a une topologie relativement compliquée.

Nous nommerons *complètement continue* une transformation continue  $\mathcal{F}(x)$  qui transformera tout ensemble borné en ensemble compact. Des critères très aisés permettent d'affirmer qu'une transformation fonctionnelle est complètement continue : si  $\mathcal{E}$  est l'espace des fonctions continues,  $\mathcal{F}(x)$  est complètement continue quand elle transforme des fonctions bornées en des fonctions possédant un même module de continuité ; toutes les transformations fonctionnelles forgées à l'aide d'intégrations sont complètement continues.

*N. B.* — Quand  $\mathcal{E}$  est euclidien, toute transformation continue est évidemment complètement continue.

2. — *La notion de degré topologique dans un espace euclidien ; son application à la discussion d'un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues.* — Soit  $y = \Phi(x)$  une transformation continue d'un espace euclidien  $\mathcal{E}$  en lui-même ; nous supposons  $\Phi(x)$  définie sur un domaine  $D$  et sur sa frontière  $D'$ . Le nombre de fois que l'image  $\Phi(D)$  de  $D$  recouvre un point  $b$  varie quand ce point se déplace ; mais comptons un recouvrement comme étant positif quand il conserve l'orientation de l'espace, comme étant négatif dans le cas contraire ; le nombre algébrique de fois que le point  $b$  est recouvert reste constant, tant que  $b$  ne franchit pas l'image  $\Phi(D')$  de la frontière  $D'$  ; ce nombre algébrique est appelé<sup>1</sup> « degré topologique de la transformation  $\Phi(x)$  au point  $b$  ». Ce degré topologique reste constant quand on modifie continûment  $\Phi(x)$ ,  $D$ ,  $b$  sans que  $b$  traverse  $\Phi(D')$ .

La notion de degré topologique permet de discuter le nombre

<sup>1</sup> La relation  $\Phi(x) = b$  représente en fait un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues.

des solutions qu'une équation  $\Phi(x) = b$  possède à l'intérieur d'un domaine  $D$ . Énonçons par exemple le *théorème d'existence* suivant: Si l'on peut réduire continûment la transformation  $y = \Phi(x)$  à l'identité,  $y = x$ , sans que l'image de  $D'$  vienne jamais recouvrir le point  $b$ , si  $b$  appartient à  $D$ , alors l'équation  $\Phi(x) = b$  possède au moins une solution. En effet le degré en  $b$  de  $\Phi(x)$  est celui de l'identité, en vertu de la propriété d'invariance du degré: c'est  $+1$ ; le point  $b$  est donc recouvert par l'image  $\Phi(D)$  de  $D$ . C.Q.F.D.

3. — *Impossibilité de définir d'une manière générale le degré d'une transformation continue opérant dans un espace abstrait.* — Il est facile de donner des exemples d'équations fonctionnelles pour lesquelles le théorème d'existence énoncé ci-dessus ne vaut plus:

Considérons l'espace  $\mathcal{E}$  des fonctions continues d'une variable  $s$  qui varie de 0 à 1. Evisageons dans  $\mathcal{E}$  le domaine fonctionnel  $D$  des fonctions  $x(s)$  telles que  $0 < x(s) < 1$ . Soit  $\varphi[x]$  une fonction continue de  $x$ , dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1, et qui vaut 0 et 1 en même temps que  $x$ . Nommons  $\Phi(x)$  la transformation fonctionnelle qui associe à  $x(s)$  la fonction  $\varphi[x(s)]$ . Soit un paramètre  $k$  variant de 0 à 1; la transformation  $k\Phi(x) + (1 - k)x$  dépend continûment de  $k$ ; elle coïncide avec l'identité pour  $k = 0$ , avec  $\Phi$  pour  $k = 1$ ; elle transforme tout point de la frontière  $D'$  de  $D$  en point de  $D'$ . Les hypothèses du théorème d'existence sont vérifiées, à cela près que  $\mathcal{E}$  n'est pas euclidien. Or l'équation  $\varphi[x(s)] = b(s)$ , où  $b$  est une fonction continue comprise entre 0 et 1, n'admet en général aucune solution continue  $x(s)$ , si  $\varphi[x]$  n'est pas croissant.

La notion de degré topologique ne peut donc pas être généralisée à une transformation quelconque d'un espace abstrait.

4. — *Un type de transformations des espaces de Banach qui possèdent un degré topologique.* — Considérons tout d'abord une transformation « dégénérée », c'est-à-dire du type suivant:  $y = x + \mathcal{F}_m(x)$ , toutes les valeurs prises par  $\mathcal{F}_m(x)$  appartenant à un sous-ensemble linéaire de  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{E}_m$ , qui a  $m$  dimensions. Cette transformation dégénérée laisse globalement invariant chaque

hyperplan parallèle à  $\mathcal{E}_m$ . Il est bien naturel de définir son degré topologique en un point  $b$  comme étant son degré quand on la considère dans l'hyperplan parallèle à  $\mathcal{E}_m$  qui passe par  $b$ . On légitime aisément cette définition en prouvant que ce degré reste le même quand on substitue à  $\mathcal{E}_m$  un hyperplan  $\mathcal{E}_n$ , à nombre plus grand de dimensions, qui contient  $\mathcal{E}_m$ . Le degré en un point  $b$  d'une transformation dégénérée, envisagée sur un domaine  $D$ , reste constant quand on modifie continûment  $b$ ,  $D$  et cette transformation sans que  $b$  atteigne l'image de la frontière  $D'$ .

Considérons maintenant une transformation qui soit à  $\varepsilon$  près une transformation dégénérée, quel que soit  $\varepsilon$ ; il est légitime de nommer degré de cette transformation les degrés (égaux à partir d'un certain rang) de ces transformations dégénérées qui l'approchent. *Les transformations en question sont les transformations  $y = x + \mathcal{F}(x)$ , où  $\mathcal{F}(x)$  est complètement continue.* En effet l'ensemble des valeurs prises par  $\mathcal{F}(x)$  appartient à  $m$  sphères de rayon  $\varepsilon$ ; on peut donc approcher, à  $\varepsilon$  près,  $\mathcal{F}(x)$  par une transformation  $\mathcal{F}_m(x)$  dont toutes les valeurs appartiennent à l'hyperplan que déterminent les centres de ces sphères.

5. — *Propriétés d'un certain type d'équations fonctionnelles.* — Soit à étudier les points d'un domaine  $D$  qui satisfont à une équation du type

$$x + \mathcal{F}(x) = 0 .$$

Supposons qu'on sache réduire continûment cette équation à une équation simple, sans qu'aucune de ses solutions atteigne la frontière  $D'$ ; on effectue pratiquement cette réduction en introduisant un paramètre  $k$  ( $0 \leq k \leq 1$ ); l'équation s'écrit

$$x + \mathcal{F}(x, k) = 0 ;$$

pour  $k = 1$  on a l'équation proposée, pour  $k = 0$  on a une équation simple. Le degré topologique au point  $y = 0$  de la transformation  $y = x + \mathcal{F}(x)$  est alors égal à celui de la transformation  $y = x + \mathcal{F}(x, 0)$ ; on le connaît. S'il diffère de zéro l'équation

proposée possède *au moins une solution*. C'est le cas, par exemple, si  $\mathcal{F}(x, 0) \equiv 0$  et si D contient le point  $y = 0$ .

On peut compléter ce théorème d'existence: la solution dont l'existence est assurée peut être rattachée à la solution  $x = 0$ ,  $k = 0$  par un *continu* de solutions de l'équation  $x + \mathcal{F}(x, k) = 0$ .

Envisageons d'autre part la transformation  $y = x + \mathcal{F}(x)$  au voisinage des points où  $x + \mathcal{F}(x) = 0$ ; l'étude locale de cette transformation en ces points se fait à l'aide de l'équation aux variations de l'équation proposée; dans certains cas on arrive à démontrer que tous les recouvrements du point  $y = 0$  sont positifs; si en outre le degré de la transformation  $x + \mathcal{F}(x)$  au point 0 est  $+1$ , un seul recouvrement est possible; on peut ainsi, dans ces circonstances favorables, établir que la solution de l'équation proposée est *unique*.

6. — *Conclusion*. — Quand D est une très grande sphère notre théorème d'existence revêt la forme suivante: Pour pouvoir affirmer que l'équation  $x + \mathcal{F}(x) = 0$  est résoluble, il suffit de démontrer qu'elle ne présente pas de solution *arbitrairement grande* quand on la réduit continûment à une équation telle que  $x = 0$ . Démontrer qu'une équation fonctionnelle a des solutions revient donc à résoudre le problème suivant: assigner des majorantes aux solutions qu'elle possède éventuellement. Il serait d'ailleurs inimaginable qu'on puisse résoudre une équation par un procédé qui ne fournisse pas de renseignement sur l'ordre de grandeur des inconnues. Pour nous, résoudre une équation, c'est majorer les inconnues et préciser leur allure le plus possible; ce n'est pas en construire, par des développements compliqués, une solution dont l'emploi pratique sera presque toujours impossible.

On peut se permettre de considérer ce théorème d'existence comme étant une généralisation au cas non linéaire de l'alternative de Fredholm: soit une équation de Fredholm  $x + \mathcal{L}(x) = b$  (où  $\mathcal{L}(x) = \int K(s, s') x(s') ds'$  est complètement continue); cette équation possède sûrement une solution, sauf si l'équation  $x + \mathcal{L}(x) = 0$  en possède une; or ce cas est justement celui où l'équation proposée admettrait des solutions *arbitrairement grandes*.

II. — EQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE  
ET DU TYPE ELLIPTIQUE.

7. — *Application de la théorie des équations fonctionnelles au problème de Dirichlet non linéaire.* — Nous allons étudier le problème de Dirichlet que voici: définir dans un domaine à deux dimensions  $\Delta$  une solution d'une équation du type elliptique

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \quad (1)$$

$$\left(4f' \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) f' \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - f'^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) > 0\right)$$

qui prenne sur la frontière  $\Delta'$  de  $\Delta$  des valeurs données.

Nous simplifierons notablement notre exposé en supposant que l'équation est quasi-linéaire, c'est-à-dire du type

$$A\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(\dots) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(\dots) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D(\dots) \quad (2)$$

Ce que nous dirons au cours de ce paragraphe, concernant l'équation (2) s'adapte à l'équation (1), au prix de quelques complications.

Nous supposons que A, B, C, D sont des fonctions continues et dérivables de leurs arguments, et que

$$A(\dots) \cdot C(\dots) - B(\dots)^2 > 0$$

quelles que soient les valeurs des arguments.

Etant donnée une fonction quelconque  $z(x, y)$ , envisageons la fonction  $Z(x, y)$  qui prend sur  $\Delta'$  les valeurs données et qui vérifie dans  $\Delta$  l'équation

$$A\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 2B(\dots) \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + C(\dots) \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = D(\dots) \quad (3)$$

$Z$  est une fonctionnelle de  $z$ ,  $\mathcal{F}(z)$ . Le problème de Dirichlet envisagé équivaut à l'équation fonctionnelle  $z = \mathcal{F}(z)$ .

Pour préciser la nature de la fonctionnelle  $\mathcal{F}(z)$  les théorèmes les plus fins de la théorie des équations linéaires du type elliptique

vont nous être indispensables. Nous allons supposer que  $z$  appartient à l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont hölderiennes; le théorème de M. Schauder, qui fut l'objet de la conférence précédente, enseigne que  $Z$  appartient à l'espace des fonctions dont la dérivée seconde est hölderienne;  $Z$  est une fonction plus régulière que  $z$ ; ceci entraîne que  $\mathcal{F}(z)$  est une transformation complètement continue. La théorie des équations fonctionnelles exposée ci-dessus s'applique donc :

Introduisons dans l'équation (2) un paramètre  $k$  qui varie de 0 à 1: pour  $k = 1$  nous avons le problème posé; pour  $k = 0$  nous avons, par exemple, le problème de Dirichlet posé pour l'équation de Laplace.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

Si l'on peut trouver une condition de Hölder que vérifient les dérivées premières de toutes les solutions de l'équation ou, plus simplement, si l'on parvient à majorer en valeur absolue les dérivées secondes de ces solutions, alors le problème envisagé possède une solution au moins.

Résoudre le problème de Dirichlet, posé pour une équation du second ordre et du type elliptique, c'est donc majorer sa solution, ses dérivées premières et ses dérivées secondes; c'est les majorer avec le maximum de précision et d'élégance.

8. — *Résolution de l'équation quasi-linéaire sans second membre.* — On connaît un cas important où cette majoration de l'inconnue est possible: le problème de Dirichlet relatif à un domaine convexe  $\Delta$ , quand l'équation est l'équation quasi-linéaire sans second membre

$$A\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(\dots) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(\dots) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

$$(AC - B^2 > 0) .$$

Tous les points de la surface inconnue  $z(x, y)$  sont hyperboliques; cette surface ne peut contenir aucun contour fermé plan; chacun de ses plans tangents la coupe suivant deux courbes (au moins), qui aboutissent au contour donné, par lequel la



surface est limitée. Ces plans rencontrent donc ce contour en quatre points au moins. Puisque ce contour a une projection convexe  $\Delta'$  et puisqu'on le suppose régulier, la plus grande pente des plans qui le rencontrent en quatre points a une borne supérieure finie. Cette borne limite supérieurement  $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ . Voici donc majorés  $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ .

Malheureusement la majoration des dérivées secondes est à l'heure actuelle extrêmement compliquée. On étudie d'abord une certaine fonction  $\omega$ , quadratique par rapport à ces dérivées secondes et dont l'expression est loin d'être simple. Supposons que  $\omega$  atteigne son maximum en un point intérieur à  $\Delta$ ; on a en ce point  $d\omega = 0, d^2\omega \leq 0$ ; ces relations, combinées avec les limitations de  $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ , avec l'équation (4) et avec les diverses dérivées des deux premiers ordres de cette équation (4), permettent, grâce à un choix très adroit de  $\omega$ , de majorer le maximum de cette quantité. Majorer les dérivées secondes revient donc à les majorer le long du contour. De nouveaux changements d'inconnue très habiles ramènent ce problème à celui que nous avons traité ci-dessus: majorer la plus grande pente d'une surface dont le contour est donné et dont tous les points sont hyperboliques.

Remarquons que parmi les équations du type (4) se trouve celle des surfaces minima:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

9. — *Conclusion.* — M. S. BERNSTEIN a traité divers autres cas spéciaux: celui des surfaces dont la courbure moyenne est constante, dont la courbure totale est constante, ...

M. H. WEYL a amorcé celui de la surface convexe dont le  $ds^2$  est donné. Je ne les exposerai pas.

L'exemple du problème de Plateau montre bien que les problèmes de Dirichlet qu'envisage M. S. Bernstein ont pour inconnue non pas une fonction  $z(x, y)$ , mais une surface qui n'est pas en général représentée par une fonction de ce type. La

Physique mathématique fournit d'innombrables systèmes différentiels ou de Pfaff dont il est vraisemblablement aisé de prouver l'équivalence avec une équation fonctionnelle du type  $x = \mathcal{F}(x)$ : les intégrer, c'est savoir majorer leurs solutions; or nous ne disposons à l'heure actuelle d'aucune méthode générale qui puisse diriger nos calculs. Forger une telle méthode, tel est le problème fondamental qui se pose. Nous possédons quelques inégalités diverses; je veux en citer une, particulièrement élégante, due à M. T. CARLEMAN (*Math. Zeitschrift*, 1921, t. 9, p. 154-160), RADÒ et BECKENBACH (*Trans. of the Amer. Math. Society*, t. 35, 1933): Si S est l'aire d'une surface (inconnue) dont tous les points sont hyperboliques et qui passe par un contour (donné) de longueur L, alors  $S < \frac{L^2}{4\pi}$ . Sans doute la théorie des fonctions analytiques, qui est si riche en inégalités, nous sera-t-elle un exemple très utile: le livre que M. Radò a consacré au problème de Plateau (*On the Problem of Plateau, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin, 1933) montre avec quel bonheur les idées de cette théorie ont déjà été appliquées à l'étude des surfaces minima.

### III. — LES ÉQUATIONS DE NAVIER.

10. — *Régimes permanents.* — Les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier, qui constituent un système non linéaire du second ordre; les variables indépendantes, qui s'imposent, sont les coordonnées d'espace et de temps: l'inconnue est la vitesse; c'est un vecteur de divergence nulle.

Etudions d'abord un régime permanent; le problème qui se pose est un problème de Dirichlet dans un cas analogue au type elliptique. M. Odqvist l'a ramené à un système d'équations intégrales; celles-ci constituent une équation fonctionnelle du type  $x = \mathcal{F}(x)$ . La première quantité que l'on majore est une grandeur physique: l'énergie dissipée par unité de temps. On parvient à la limiter en utilisant deux expressions qu'elle revêt: la première est une intégrale de volume qui exprime l'intensité du frottement visqueux interne; la deuxième est une intégrale

de surface qui mesure la quantité d'énergie fournie au système. La majoration de l'énergie dissipée effectuée, on majore aisément les diverses inconnues, et ceci résout le problème.

11. — *Mouvements non permanents; solutions turbulentes.* — Etudions maintenant le mouvement qui correspond à un champ de vitesses initiales donné; le problème est d'un type analogue au type parabolique; simplifions la question en admettant que le liquide emplisse tout l'espace. L'énergie cinétique décroît; la quantité d'énergie dissipée est au plus égale à l'énergie cinétique initiale; ces deux inégalités, qui résultent des équations de Navier, constituent deux premières majorations fondamentales.

Si le mouvement est plan, c'est-à-dire si l'on réduit à deux le nombre de dimensions de l'espace, on peut parvenir à combiner ces inégalités avec les équations de Navier de manière à obtenir une série d'inégalités de plus en plus précises; il en résulte l'existence d'une solution régulière définie de l'instant initial  $t = 0$  à  $t = +\infty$ .

Mais il en va bien autrement dans l'espace à trois dimensions. Les inégalités énergétiques ne semblent pas entraîner que le maximum de la vitesse reste borné, que le mouvement reste régulier; on doute qu'il soit possible d'établir un théorème d'existence global, c'est-à-dire concernant l'intervalle  $0 \leq t < +\infty$ . Cependant il est bien vraisemblable qu'on peut régulariser le mouvement en se contentant de renforcer les termes de viscosité quand des irrégularités tendent à se former; les équations de Navier, très peu modifiées, possèdent une solution définie de l'instant initial à  $t = +\infty$ . Pour examiner comment se comporte cette solution régulière, quand la modification apportée aux équations de Navier tend vers 0, il est nécessaire d'utiliser la théorie des fonctions mesurables: Le champ des vitesses tend vers une ou plusieurs limites, définies par des fonctions de carrés sommables, qu'on sait seulement être mesurables; ces fonctions possèdent des dérivées premières en un sens généralisé; elles vérifient les relations intégrales de M. Oseen. Ces relations intégrales équivalent en pratique aux équations de Navier; mais elles ont l'avantage sur ces dernières de ne pas contenir celles des dérivées des

inconnues qui n'ont pas de raison physique d'exister ; il se trouve que ce sont les dérivées dont on ne réussit pas à établir l'existence.

Nommons un tel champ de vitesses : « solution turbulente des équations de Navier ». Une solution turbulente a la structure suivante : il existe sur l'axe des temps une série d'intervalles de régularité, durant lesquels cette solution constitue une solution régulière des équations de Navier, indéfiniment dérivable ; l'ensemble complémentaire de l'axe des temps, qui constitue l'ensemble des irrégularités, est de mesure nulle ; à ces époques d'irrégularités le champ des vitesses vérifie seulement une condition de continuité très large.

La théorie des équations aux dérivées partielles semble ainsi être appelée à devenir un champ d'applications de la *théorie des fonctions réelles*.

## HISTORIQUE ET BIBLIOGRAPHIE

### Chapitre I.

Tout ce que l'on sait actuellement sur le sujet que traite le premier chapitre est contenu dans les deux articles suivants :

LERAY-SCHAUDER, *Annales de l'Ecole normale*, t. 51, 1934, p. 45-63 (ch. I, II, III).

LERAY, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t. 200, 25 mars 1935, p. 1082.

Le premier théorème d'existence qui a réussi à résoudre une équation fonctionnelle pouvant admettre plusieurs solutions est celui « du point fixe » :

BIRKHOFF et KELLOG, *Transactions of the Amer. Math. Society*, t. 23 (1922).

SCHAUDER, *Studia mathematica*, t. 2, 1930, p. 170-179 (Satz II).

Ce théorème du point fixe n'est qu'un corollaire du théorème d'existence qu'expose le chapitre I de cette conférence.

J'ai signalé le premier que la démonstration d'un théorème d'existence pouvait être ramenée à la majoration de l'inconnue :

LERAY, Thèse, *Journal de Mathématiques*, t. 12, 1933, chap. I (p. 1-20).

M. SCHAUDER, le premier, découvrit que des théorèmes de Topologie combinatoire valent encore dans les espaces de Banach, quand on prend la précaution essentielle de substituer à la notion de transformation continue quelconque celle de transformation du type  $x + \mathcal{F}(x)$  (où  $\mathcal{F}(x)$  est complètement continue).

SCHAUDER, *Studia mathematica*, Invarianz des Gebietes in Funktionalräumen, t. 1, 1929 (p. 123-139).

*Math. Annalen*, t. 106, 1932 (p. 661-721).

La notion de degré topologique est due à

BROUWER, *Math. Annalen*, t. 71, 1912 (p. 97-106).

Mais cet auteur considère des transformations opérant sur des variétés fermées à  $n$  dimensions; l'emploi que, dans notre travail commun, M. Schauder et moi avons fait de cette notion, suppose essentiellement que la transformation envisagée est définie sur l'ensemble de fermeture d'un ensemble ouvert.

## Chapitre II.

Les travaux fondamentaux et classiques sur les problèmes de Dirichlet non linéaires sont ceux de

E. PICARD, voir par exemple ses « Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles », rédigées par M. Brelot, *Cahiers scientifiques de M. Julia*, Gauthier-Villars, 1930.

S. BERNSTEIN, *Math. Annalen*, t. 69, 1910, p. 82-136. — *Annales de l'École normale*, t. 27, 1910 (p. 233-256); t. 29, 1912, (p. 431-485).

M. GIRAUD a publié ces dernières années dans les *Annales de l'École normale*, dans les *Comptes rendus de l'Académie* et dans les autres périodiques français, de nombreux et importants mémoires qui prolongent les recherches de MM. Picard et Bernstein.

MM. PICARD, BERNSTEIN et GIRAUD obtiennent leurs théorèmes d'existence par la méthode des approximations successives.

M. SCHAUDER, en s'appuyant sur des théorèmes de Topologie généralisés aux espaces abstraits, a établi des résultats que ne peut atteindre la méthode des approximations successives:

SCHAUDER, *Math. Zeitschrift*, t. 26, 1927. — *Studia mathematica*, t. 1, 1929. — *Math. Annalen*, t. 106, 1932 (p. 661-721). — *Comptes rendus de l'Académie*, t. 199, 26 déc. 1934.

L'affirmation du § 7, « résoudre le problème de Dirichlet, c'est savoir majorer l'inconnue », se trouve dans le travail déjà cité:

LERAY-SCHAUDER, *Annales de l'École normale*, t. 51, 1934 (chap. IV et V).

Cette affirmation, qui s'appuie sur notre théorie des équations fonctionnelles, est une simplification notable des théorèmes dont M. S. Bernstein déduit ses théorèmes d'existence: cet auteur est conduit par ses méthodes à se restreindre aux cas où l'unicité de la solution est assurée; il fait des hypothèses superflues; par exemple, quand il résout l'équation quasi-linéaire sans second membre (4), il se trouve contraint à se limiter au cas où  $A, B, C$  dépendent de  $x, y, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$  et sont indépendants de  $z$ .

Les majorations du § 8 se trouvent en principe dans les pages 119-124 du travail déjà cité:

S. BERNSTEIN, *Math. Annalen*, t. 69, 1910.

La majoration de la plus grande pente du plan tangent a été reprise par:  
T. RADÒ, *Acta litt. ac scient.*, Szeged, t. 4, 1924-1936.  
VON NEUMANN, *Abhandlungen des math. Seminars*, Hambourg, t. 8, 1931.

M. Schauder a repris la majoration des dérivées secondes en mettant bien en évidence que les six pages citées constituent la partie essentielle de la résolution de l'équation quasi-linéaire sans second membre:

SCHAUDER, *Math. Zeitschrift*, t. 37, 1933, p. 623-634.

Voir, d'autre part, concernant les majorations des solutions d'équations du second ordre et du type elliptique:

H. LEWY, *Trans. of the American Math. Society*, t. 37, 1935.

### Chapitre III.

LERAY, Thèse, *Journal de Mathématiques*, t. 12, 1933, p. 1-82. — *Acta mathematica*, t. 63, p. 193-248 (1934). — *Journal de Mathématiques*, t. 13, 1934, p. 331-418. — *Comptes rendus de l'Académie*, t. 194, 30 mai 1932, p. 1893.

Ces quatre articles utilisent les travaux antérieurs de MM. Oseen et Odqvist:

OSEEN, *Hydrodynamik*, Leipzig, 1927. — *Acta mathematica*, t. 34, 1911.  
ODQVIST, *Math. Zeitschrift*, t. 32, 1930.

---

## CHRONIQUE

---

### Le Jubilé de M. Jacques Hadamard.

La cérémonie du Jubilé scientifique de M. Jacques Hadamard, Membre de l'Institut, a eu lieu au Collège de France, le mardi 7 janvier 1936, sous la présidence de M. Mario ROUSTAN, Ministre de l'Education nationale et de M. FABRY, Ministre de la Guerre, devant une nombreuse assistance composée d'anciens élèves, d'amis, de collègues et de savants français et étrangers.

Des discours furent prononcés en éloge du grand savant par MM. BÉDIER, Administrateur du Collège de France, LEBESGUE, Professeur au Collège de France, le Général HACHETTE, commandant l'Ecole Polytechnique, MM. GUILLET, Directeur de l'Ecole centrale des Arts et Manufactures, Emile PICARD, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, VESSIOT, au nom de l'Association des