Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1936)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES PROBLÈMES NON LINÉAIRES

Autor: Leray, Jean

Kapitel: II. — Equations aux dérivées partielles du second ordre ET DU TYPE ELLIPTIQUE.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27309

II. — Equations aux dérivées partielles du second ordre et du type elliptique.

7. — *Application de la théorie des équations fonctionnelles au problème de Dirichlet non linéaire.* — Nous allons étudier le problème de Dirichlet que voici: définir dans un domaine à deux dimensions Δ une solution d'une équation du type elliptique

$$f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0 \tag{1}$$

$$\left(4 f'\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) f'\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - f'^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) > 0\right)$$

qui prenne sur la frontière Δ' de Δ des valeurs données.

Nous simplifierons notablement notre exposé en supposant que l'équation est quasi-linéaire, c'est-à-dire du type

$$A\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B(...)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C(...)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = D(...)\,. \tag{2}$$

Ce que nous dirons au cours de ce paragraphe, concernant l'équation (2) s'adapte à l'équation (1), au prix de quelques complications.

Nous supposons que A, B, C, D sont des fonctions continues et dérivables de leurs arguments, et que

$$A(...) \cdot C(...) - B(...)^2 > 0$$

quelles que soient les valeurs des arguments.

Etant donnée une fonction quelconque $z(x, y)$, envisageons la fonction $Z(x, y)$ qui prend sur Δ' les valeurs données et qui vérifie dans Δ l'équation

$$A\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + 2B(...)\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} + C(...)\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = D(...)\,. \tag{3}$$

Z est une fonctionnelle de z, $\mathcal{F}(z)$. Le problème de Dirichlet envisagé équivaut à l'équation fonctionnelle $z = \mathcal{F}(z)$.

Pour préciser la nature de la fonctionnelle $\mathcal{F}(z)$ les théorèmes les plus fins de la théorie des équations linéaires du type elliptique vont nous être indispensables. Nous allons supposer que z appartient à l'espace des fonctions dont les dérivées premières sont hölderiennes; le théorème de M. Schauder, qui fut l'objet de la conférence précédente, enseigne que Z appartient à l'espace des fonctions dont la dérivée seconde est hölderienne; Z est une fonction plus régulière que z; ceci entraîne que $\mathcal{F}(z)$ est une transformation complètement continue. La théorie des équations fonctionnelles exposée ci-dessus s'applique donc:

Introduisons dans l'équation (2) un paramètre k qui varie de 0 à 1: pour $k = 1$ nous avons le problème posé; pour $k = 0$ nous avons, par exemple, le problème de Dirichlet posé pour l'équation de Laplace.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \ .$$

Si l'on peut trouver une condition de Hölder que vérifient les dérivées premières de toutes les solutions de l'équation ou, plus simplement, si l'on parvient à majorer en valeur absolue les dérivées secondes de ces solutions, alors le problème envisagé possède une solution au moins.

Résoudre le problème de Dirichlet, posé pour une équation du second ordre et du type elliptique, c'est donc majorer sa solution, ses dérivées premières et ses dérivées secondes; c'est les majorer avec le maximum de précision et d'élégance.

8. — *Résolution de l'équation quasi-linéaire sans second membre.* — On connaît un cas important où cette majoration de l'inconnue est possible: le problème de Dirichlet relatif à un domaine convexe Δ, quand l'équation est l'équation quasi-linéaire sans second membre

$$\mathrm{A}\left(x\,,\ y\,,\ z\,,\ \frac{\partial z}{\partial x}\,,\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\mathrm{B}(\ldots)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + \mathrm{C}(\ldots)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \qquad (4)$$

$$(\mathrm{AC} - \mathrm{B}^2 > 0) \ .$$

Tous les points de la surface inconnue $z(x, y)$ sont hyperboliques; cette surface ne peut contenir aucun contour fermé plan; chacun de ses plans tangents la coupe suivant deux courbes (au moins), qui aboutissent au contour donné, par lequel la surface est limitée. Ces plans rencontrent donc ce contour en quatre points au moins. Puisque ce contour a une projection convexe Δ' et puisqu'on le suppose régulier, la plus grande pente des plans qui le rencontrent en quatre points a une borne supérieure finie. Cette borne limite supérieurement $\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$. Voici donc majorés $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Malheureusement la majoration des dérivées secondes est à l'heure actuelle extrêmement compliquée. On étudie d'abord une certaine fonction w, quadratique par rapport à ces dérivées secondes et dont l'expression est loin d'être simple. Supposons que w atteigne son maximum en un point intérieur à Δ; on a en ce point $dw = 0$, $d^2w \leqq 0$; ces relations, combinées avec les limitations de $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, avec l'équation (4) et avec les diverses dérivées des deux premiers ordres de cette équation (4), permettent, grâce à un choix très adroit de w, de majorer le maximum de cette quantité. Majorer les dérivées secondes revient donc à les majorer le long du contour. De nouveaux changements d'inconnue très habiles ramènent ce problème à celui que nous avons traité ci-dessus: majorer la plus grande pente d'une surface dont le contour est donné et dont tous les points sont hyperboliques.

Remarquons que parmi les équations du type (4) se trouve celle des surfaces minima:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

9. — *Conclusion.* — M. S. Bernstein a traité divers autres cas spéciaux: celui des surfaces dont la courbure moyenne est constante, dont la courbure totale est constante, ...

M. H. Weyl a amorcé celui de la surface convexe dont le ds^2 est donné. Je ne les exposerai pas.

L'exemple du problème de Plateau montre bien que les problèmes de Dirichlet qu'envisage M. S. Bernstein ont pour inconnue non pas une fonction $z(x, y)$, mais une surface qui n'est pas en général représentée par une fonction de ce type. La

Physique mathématique fournit d'innombrables systèmes différentiels ou de Pfaff dont il est vraisemblablement aisé de prouver l'équivalence avec une équation fonctionnelle du type $x = \mathfrak{F}(x)$: les intégrer, c'est savoir majorer leurs solutions; or nous ne disposons à l'heure actuelle d'aucune méthode générale qui puisse diriger nos calculs. Forger une telle méthode, tel est le problème fondamental qui se pose. Nous possédons quelques inégalités diverses; je veux en citer une, particulièrement élégante, due à M. T. Carleman (*Math. Zeitschrift*, 1921, t. 9, p. 154-160), Radò et Beckenbach (*Trans. of the Amer. Math. Society*, t. 35, 1933): Si S est l'aire d'une surface (inconnue) dont tous les points sont hyperboliques et qui passe par un contour (donné) de longueur L, alors $S < \frac{L^2}{4\pi}$. Sans doute la théorie des fonctions analytiques, qui est si riche en inégalités, nous sera-t-elle un exemple très utile: le livre que M. Radò a consacré au problème de Plateau (On the Problem of Plateau, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Springer, Berlin, 1933) montre avec quel bonheur les idées de cette théorie ont déjà été appliquées à l'étude des surfaces minima.

III. — Les équations de Navier.

10. — *Régimes permanents.* — Les mouvements des liquides visqueux sont régis par les équations de Navier, qui constituent un système non linéaire du second ordre; les variables indépendantes, qui s'imposent, sont les coordonnées d'espace et de temps: l'inconnue est la vitesse; c'est un vecteur de divergence nulle.

Etudions d'abord un régime permanent; le problème qui se pose est un problème de Dirichlet dans un cas analogue au type elliptique. M. Odqvist l'a ramené à un système d'équations intégrales; celles-ci constituent une équation fonctionnelle du type $x = \mathfrak{F}(x)$. La première quantité que l'on majore est une grandeur physique: l'énergie dissipée par unité de temps. On parvient à la limiter en utilisant deux expressions qu'elle revêt: la première est une intégrale de volume qui exprime l'intensité du frottement visqueux interne; la deuxième est une intégrale