CONFÉRENCES INTERNATIONALES DE TOPOLOGIE [1]

LA TOPOLOGIE DES ESPACES REPRÉSENTATIFS DES GROUPES DE LIE [2]

PAR

Elie CARTAN, Membre de l'Institut (Paris).

I. — GÉNÉRALITÉS SUR LES GROUPES FINIS ET CONTINUS.

La topologie des groupes n'a fait l'objet de recherches suivies que depuis une dizaine d'années. Je m'occuperai presque exclusivement dans cette Conférence des groupes finis et continus de Lie. Les travaux déjà anciens sur la structure infinitésimale de ces groupes fournissent presque tous les éléments nécessaires à l'étude de leurs propriétés topologiques en grand; réciproquement cette étude éclaire d'un jour nouveau certains théorèmes de nature purement algébrique relatifs à la structure infinitésimale des groupes et à leurs représentations linéaires: dans cette voie, c'est M. Hermann WEYL qui a été l'initiateur [**4**] [3].

Je désirerais, avant d'entrer dans le vif du sujet, dire quelques mots des groupes finis et continus les plus généraux et de ce

[1] Ces conférences ont eu lieu à l'Université de Genève, du 21 au 25 octobre 1935, sous la présidence de M. Elie CARTAN, Membre de l'Institut. La série comprenait en outre une conférence de M. A. WEIL, Maître de conférences à l'Université de Strasbourg, intitulée: La mesure invariante dans les espaces homogènes clos; elle fera l'objet d'un fascicule du *Mémorial des Sciences mathématiques*.

[2] Conférence faite le 21 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*.

[3] Les nombres entre crochets réfèrent aux ouvrages cités dans la bibliographie.

qu'on sait de leurs propriétés topologiques. Un tel groupe, d'ordre r, peut être défini [**7**, **16**] au moyen d'une variété topologique (au sens de Hausdorff) à r dimensions, dont chaque point représente un élément du groupe; à l'intérieur de cette variété on a défini une opération (multiplication) faisant correspondre à deux points ou éléments quelconques a et b rangés dans un certain ordre un troisième point $c = ab$, cette opération jouissant des propriétés suivantes:

1° *Elle est associative:* (ab) c = a (bc);

2° *Elle admet un module ou élément-unité* i *tel que* ia = ai;

3° *Chaque élément* a *admet un inverse* a^{-1} *caractérisé par* $\mathrm{aa}^{-1} = \mathrm{a}^{-1}\mathrm{a} = \mathrm{i}$;

4° *L'inverse* a^{-1} *de* a *dépend d'une manière continue de* a *et le produit* ab *dépend d'une manière continue de l'ensemble des deux points* a *et* b.

Le groupe fini et continu est un groupe de Lie s'il est possible de choisir dans la variété des coordonnées telles que les fonctions définissant la loi de multiplication ou de composition soient analytiques; il suffit du reste que, pour un choix convenable des coordonnées, ces fonctions soient dérivables jusqu'à un certain ordre. La question de savoir si tout groupe fini et continu est un groupe de Lie n'est pas tranchée; on sait cependant que les groupes d'ordre 1 et 2, ainsi que les groupes compacts ou clos sont des groupes de Lie: ce dernier résultat est dû, comme on sait, à M. J. von Neumann.

La variété d'un groupe fini et continu jouit de deux propriétés topologiques simples:

1° *Elle est orientable;*

2° *Son groupe fondamental, ou groupe de Poincaré, est abélien.*

La première propriété est évidente, car on obtient une orientation cohérente des différents voisinages de la variété en orientant d'une certaine manière un voisinage V_0 de l'élément unité i et en conférant au voisinage V de l'élément a qui se déduit de V_0 par la transformation $x' = ax$ l'orientation induite par cette transformation.

La seconde propriété est plus cachée. Tout groupe fini et continu g admet, d'après O. SCHREIER [**8**], un groupe de recouvrement simplement connexe G. Les éléments de G qui correspondent à l'élément-unité i de g forment un sous-groupe *proprement discontinu* γ de G. Soit α un élément de γ, x un élément quelconque de G; l'élément $x\alpha\, x^{-1}$ de G, correspondant à l'élément unité de g, appartient à γ; il se réduit à α pour $x = i$ et il varie d'une manière continue avec x: il est donc toujours égal à α. L'élément α appartenant ainsi au centre de G, le groupe γ est abélien; or il est isomorphe au groupe de Poincaré de g.

Aux deux propriétés précédentes on en peut ajouter une troisième lorsque le groupe est clos:

3° *La caractéristique d'Euler d'un groupe fini et continu clos est nulle.*

Cela résulte immédiatement de l'existence, pour la variété, de déformations sans point fixe, par exemple celles qui sont définies par les équations $x' = ax$ (groupe des paramètres).

Les propriétés précédentes ne sont pas caractéristiques des variétés de groupes. Par exemple l'espace sphérique à $2n + 1 \geqq 5$ dimensions est orientable, simplement connexe et de caractéristique nulle; si c'était l'espace d'un groupe, ce groupe serait clos, donc serait un groupe de Lie; d'après les théorèmes que nous verrons un peu plus loin, ce groupe serait semi-simple et son troisième nombre de Betti serait positif, alors que celui de l'espace donné est nul.

II. — LES GROUPES DE LIE.

Arrivons aux groupes de Lie. Rappelons qu'un tel groupe, d'ordre r, admet des transformations infinitésimales dont l'ensemble forme un anneau avec r éléments de base $X_1, X_2, \ldots, X_r$; toute transformation infinitésimale est de la forme $e^i X_i$ [1] avec r coefficients réels arbitraires e^i. Rappelons aussi la notion du crochet (XY) de deux transformations infinitésimales, celle des *constantes de structure* c_{ij}^k qui entrent

[1] Nous supprimons, suivant l'usage, le signe de sommation devant un indice répété deux fois.