

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LA THÉORIE DES NŒUDS  
**Autor:** Seifert, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27311>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# LA THÉORIE DES NŒUDS <sup>1</sup>

PAR

H. SEIFERT (Dresde).

---

Le problème essentiel de la théorie des nœuds peut être formulé comme suit: Soit donné un nœud dans l'espace euclidien à trois dimensions; c'est-à-dire une chaîne de segments fermée simple, donc un polygone. Il est utile de fermer l'espace euclidien par un point à l'infini. Autrement dit on se trouvera par la suite sur une variété close, la sphère à trois dimensions  $S$ . Soit donc  $k$  un nœud de  $S$  et  $k'$  un autre nœud d'une sphère à trois dimensions  $S'$ . Nous nous demanderons alors: Existe-t-il une représentation topologique de  $S$  sur  $S'$ , transformant  $k$  en  $k'$ ? Si c'est le cas,  $k$  et  $k'$  seront dit équivalents.

Rappelons d'abord les *invariants de nœud* les plus importants<sup>2</sup>.

1. Si  $k$  et  $k'$  sont équivalents, leurs espaces complémentaires  $S - k$  et  $S' - k'$  devront être homéomorphes. Ceci nous fournit le *groupe du nœud* de DEHN, c'est-à-dire le groupe fondamental de  $S - k$ , qui est un des invariants de nœud les plus efficaces. Dehn a montré qu'il est aisé de trouver des éléments générateurs et des relations caractéristiques de ce groupe, quand le nœud

---

<sup>1</sup> Conférence faite le 21 octobre 1935 dans le cycle des *Conférences internationales des Sciences mathématiques* organisées par l'Université de Genève; série consacrée à *Quelques questions de Géométrie et de Topologie*. — Traduction rédigée par M. M. RUEFF (Zurich).

<sup>2</sup> K. REIDEMEISTER, *Knotentheorie* (Berlin, 1932). On y trouve un index bibliographique jusqu'à 1932.

H. SEIFERT, Verschlingungsinvarianten. *Sitzber. Preuss. Akad. Wiss*, 26 (1933). — Ueber das Geschlecht von Knoten. *Math. Ann.*, 110 (1934). — Die Verschlingungsinvarianten der zyklischen Knotenüberlagerungen. *Abh. Math. Sem. Hamburg*, 11 (1935).

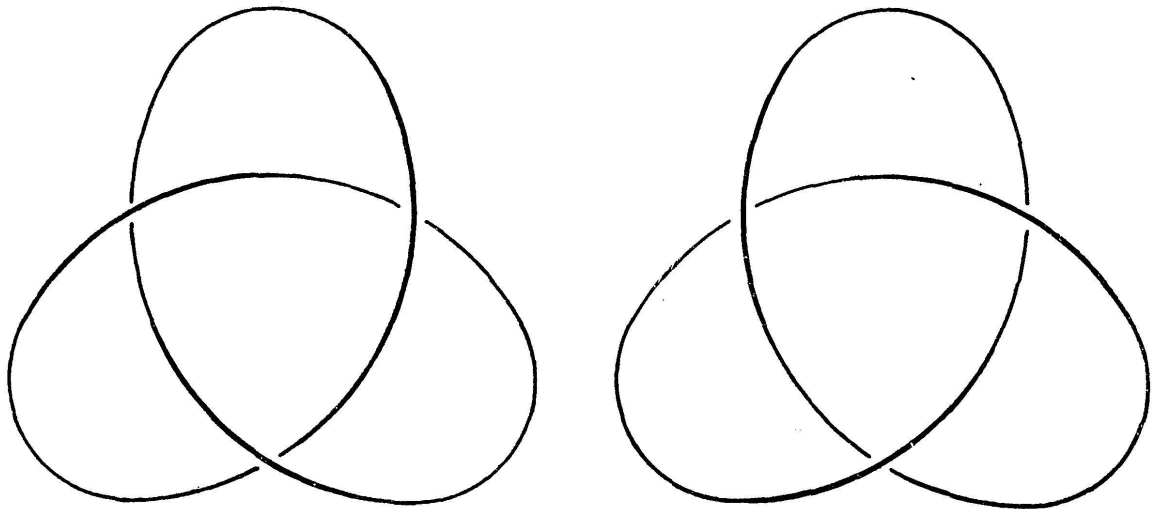
J. W. ALEXANDER, A matrix knot invariant. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 19 (1933).

est donné par sa projection plane. Mais comme il n'existe pas de procédé général permettant de distinguer des groupes donnés par des éléments et relations génératrices, le groupe du nœud est d'une importance moindre. On a tout simplement remplacé le problème des nœuds non-résolu par un problème, non résolu également, de la théorie des groupes.

2. ALEXANDER et REIDEMEISTER ont touché à d'autres invariants par le procédé suivant: On considère, au lieu de  $S - k$ , les variétés de recouvrement de  $S - k$  sans ramification, ou, ce qui revient au même, les variétés de recouvrement de  $S$  ramifiées le long de  $k$ . Ces variétés ont des groupes d'homologie qui en général sont différents pour des nœuds différents. Il s'agit avant tout ici des *recouvrements cycliques de nœuds*, dont je donnerai plus tard la définition. Le recouvrement cyclique à une infinité de feuillets a une importance toute particulière. Comme nous le verrons, c'est des groupes d'homologie de ce dernier recouvrement qu'on tire l'*invariant polynomial* d'Alexander  $\Delta(x)$ , ou comme on l'appelle tout court, le *polynôme L du nœud*. C'est un polynôme à coefficients entiers  $\Delta(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  qui est lié au nœud d'une façon invariante.

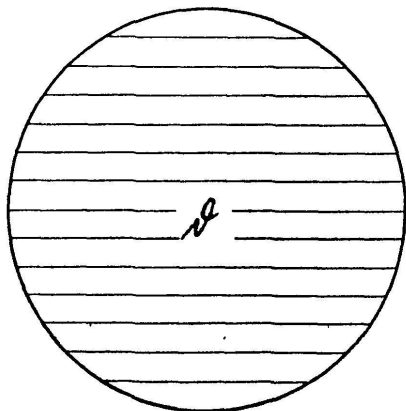
3. Les *invariants d'enlacement* des variétés cycliques de recouvrement sont d'autres invariants de nœud. Nous savons qu'il est possible d'attacher à toute paire d'éléments du groupe de torsion d'une variété à 3 dimensions orientée, un coefficient d'enlacement rationnel bien déterminé. Ces coefficients d'enlacement permettent de calculer les invariants d'enlacement. Ce sont des invariants du nœud, dont l'espace complémentaire possède une orientation spaciale déterminée, et ils changent en général avec cette orientation. A l'aide de ces invariants d'enlacement on peut parfois démontrer qu'un nœud n'est pas déformable en son symétrique par rapport à un plan. Au moyen de ces invariants on a par exemple démontré que le nœud des trèfles (Kleeblattschlinge) gauche et droit ne peuvent être déformés l'un dans l'autre (*fig. 1*); Dehn l'avait d'ailleurs déjà démontrer en considérant les automorphismes du groupe de nœud.

4. Citons finalement encore un invariant de nœud qui, il est vrai, n'est pas d'une grande importance pour distinguer des nœuds, mais qui se trouve en relation très étroite avec les invariants d'homologie 2. Il s'agit du *genre du nœud* qui est défini comme suit: Nous savons qu'il existe, pour tout nœud  $k$ , une surface orientable, sans singularités et sous-tendue par  $k$ .

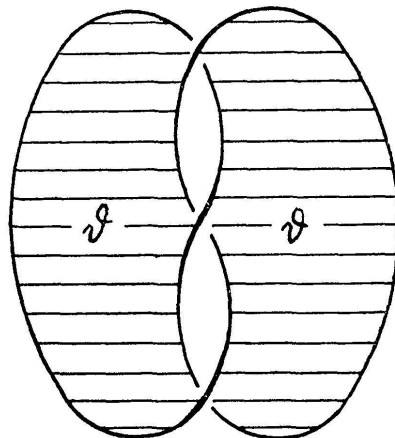


*Fig. 1*

Autrement dit il existe une surface orientable et sans singularités  $D$ , possédant un trou tel que le bord du trou soit justement  $k$ . Si  $k$  est équivalent au cercle on pourra choisir comme surface un élément à deux dimensions (*fig. 2*). Dans tous les autres cas  $D$  sera d'un genre supérieur, c'est-à-dire une sphère



*Fig. 2*



*Fig. 3*

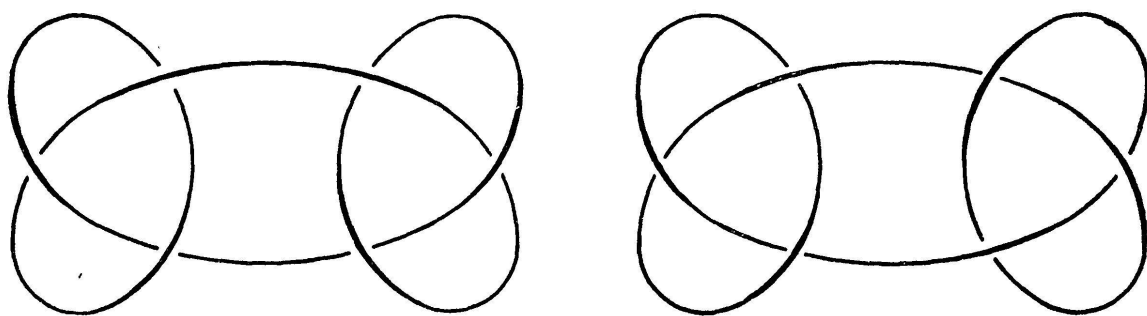


avec  $h$  anses et un trou. Par exemple le nœud du trèfle est le bord d'un tore troué (*fig. 3*). Il est clair qu'on pourra faire passer par tout nœud une surface de genre arbitrairement grand, puisqu'on peut ajouter n'importe où, une anse à une surface qu'on aurait déjà sous-tendu par  $k$ . Il existe, par contre, pour tout nœud  $k$ , une surface de genre minimum, sous-tendue par  $k$ . C'est ce genre là qu'on appelle le genre du nœud. Ce genre est, il est clair, un invariant du nœud. Le cercle est de genre 0, alors que le nœud du trèfle est du genre 1.

Connaissant ce système d'invariants, deux questions s'imposent avant tout.

- A. *Dans quelle mesure les nœuds sont-ils caractérisés par ces invariants ?*
- B. *Ces invariants sont-ils indépendants ? Sinon quelles sont les relations qui existent entre eux ?*

J'aimerais vous exposer les résultats auxquels on est parvenu jusqu'à aujourd'hui. Tout d'abord une chose est claire: C'est que les groupes d'homologie 2) y compris le polynome  $L$ , sont déterminés par le groupe du nœud 1). Ceci parce que les groupes fondamentaux des variétés de recouvrement de  $S - k$  sont des sous-groupes du groupe du nœud. Il en est autrement des invariants d'enlacement. Ceux-ci ne sont pas déterminés par le groupe du nœud. Par exemple: Le groupe du nœud est le même pour le produit de deux nœuds du trèfle droits et pour le produit



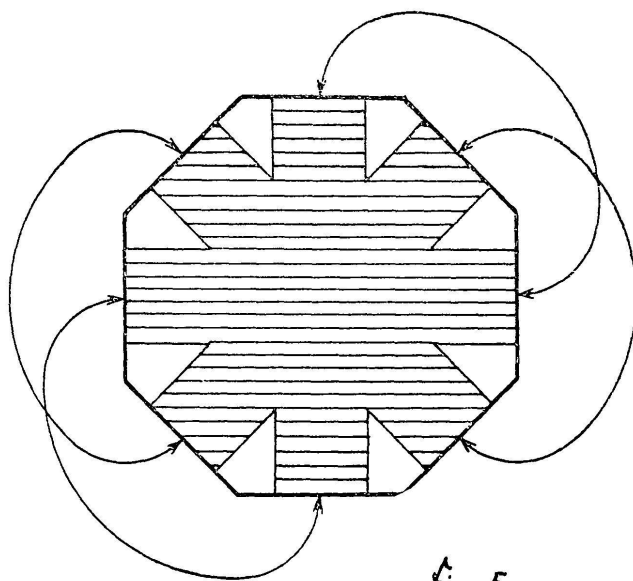
*Fig. 4*

d'un nœud du trèfle droit par un gauche (*fig. 4*), alors que les invariants d'enlacement de ces produits sont différents.

Il ne faudrait toutefois pas croire que le groupe du nœud est contenu dans les invariants d'enlacement. Nous rencontrerons, au contraire, une infinité de nœuds, dont les invariants d'enlacement sont les mêmes, et qui pourtant pourront être distingués les uns des autres grâce au groupe du nœud.

Nous savons que ALEXANDER ET BRIGGS ont calculé les groupes d'homologie des recouvrements à 2 et 3 feuillets, ainsi que le polynôme  $L$  de tous les nœuds comptant jusqu'à 9 recouvrements. Parmi ces 84 nœuds on rencontre 3 paires seulement, qu'on ne peut distinguer par les invariants d'homologie; pour ces 3 paires le groupe du nœud pourtant est efficace. Ceci montre la portée des invariants d'homologie.

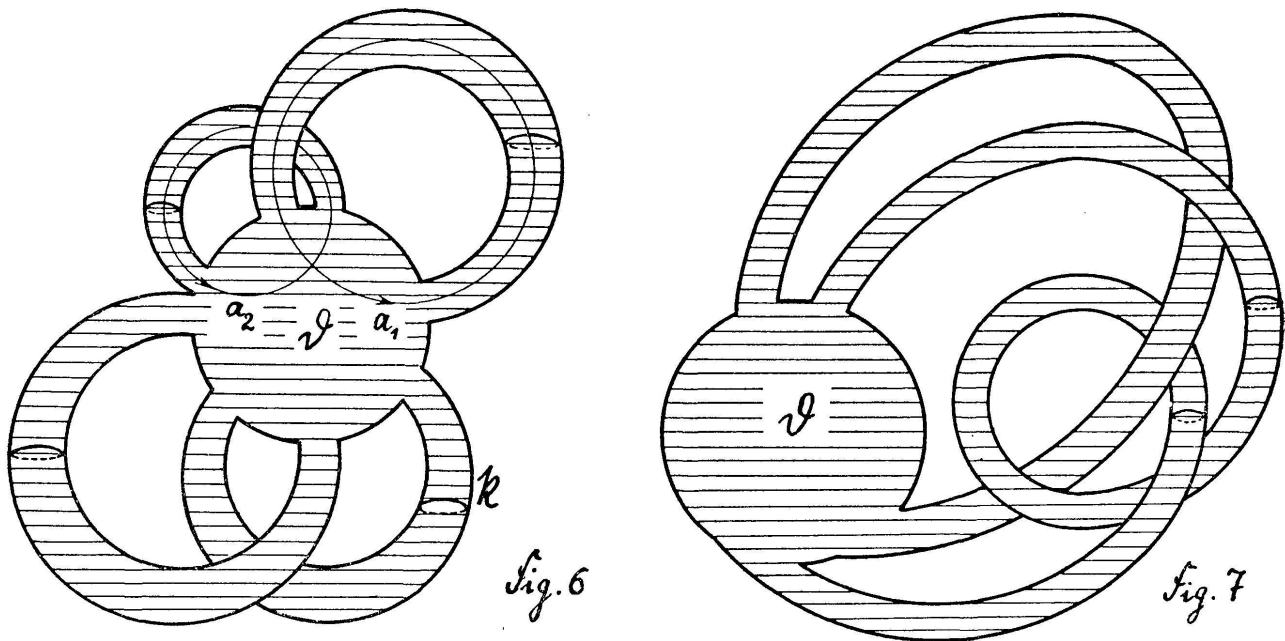
Pour avoir d'autres résultats concernant la portée des invariants 2) et 3), il est nécessaire de représenter ces derniers explicitement par des formules. Dans ce but nous partons du fait qu'il est possible de trouver pour tout nœud  $k$  une surface  $D$  orientable et sans singularités, sous-tendue par  $k$ . Soit  $D$



*Fig. 5*

de genre  $h$ , c'est-à-dire une sphère avec  $h$  anses et un trou. Une telle surface avec un seul trou peut toujours être considérée comme un élément à 2 dimensions auquel on a ajouté  $2h$  rubans. Pour le voir développons la surface close de genre  $h$  en son polygone fondamental (*fig. 5*,  $h = 2$ ). On obtiendra un trou de la surface en découpant les angles du polygone. En identi-

fiant les côtés correspondants on obtient bien un élément à 2 dimensions auquel on a ajouté  $2h$  rubans. Il est vrai que la surface  $D$  n'aura pas toujours la position simple de la figure 6. Les rubans peuvent s'enlacer et se tordre. La figure 7 montre une surface de genre 1 avec un trou, immergée d'une manière un peu plus compliquée dans l'espace.



Par contre on pourra toujours atteindre la configuration suivante: 1) La projection de l'élément sur le plan est un disque. 2) En projection, les rubans n'ont que leurs attaches en commun

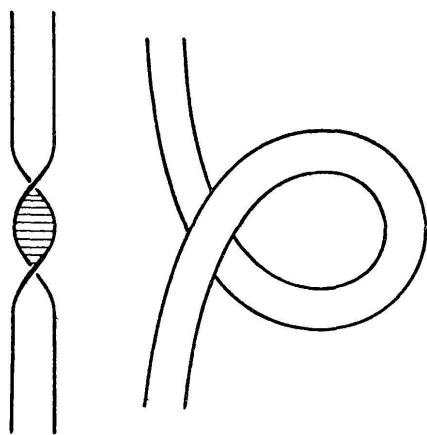


Fig. 8

avec le disque; un ruban ne pourra donc jamais traverser le disque. 3) On peut admettre que les rubans ne sont pas tordus en projection, puisqu'un tour pourra toujours être remplacé par un recouplement du ruban (fig. 8).

On parvient à la *variété cyclique de recouvrement*  $S_g$  de la manière suivante: On coupe l'espace à trois dimensions  $S$ , dans lequel se trouve  $D$ , le long de  $D$ ;  $S$  devient une variété à trois dimensions bordée, un *feuillet* à 3 dimensions  $\bar{S}$ . Le bord de  $S$  est formé par les deux côtés de la section que

nous appellerons  $D$  et  $xD$ . A tout point  $P$  du côté gauche correspond un point  $xP$  du côté droit et nous pourrions nous figurer que  $P$  et  $xP$  sont projetés sur un même point du plan. Les deux surfaces  $D$  et  $xD$  sont soudées l'une à l'autre le long de  $k$  et forment ensemble une surface close qui est la sphère avec  $2h$  anses. Après la coupe de l'espace on doit se représenter l'élément à deux dimensions comme une sphère et les rubans comme des tuyaux; ce que nous avons indiqué dans la figure 7 par de petits cercles méridiens autour des tuyaux. Le feuillet  $\bar{S}$  est la région extérieure à la surface fermée  $D + xD$ .

Le recouvrement cyclique à  $g$  feuillets  $S_g$  s'obtient de la façon suivante. On prend  $g$  exemplaires d'un tel feuillet, on soude le bord droit du feuillet  $i$  au bord gauche du feuillet  $i + 1$  et finalement le bord droit du feuillet  $g$  au bord gauche du premier feuillet. Si nous désignons en suivant les feuillets par  $\bar{S}, x\bar{S}, \dots, x^{g-1}\bar{S}$ , le bord droit  $x^{i+1}D$  de  $x_i\bar{S}$  sera identique au bord gauche de  $x^{i+1}\bar{S}$ , et en tournant autour du nœud  $k$  on aura le cycle suivant:

$$D, \bar{S}, xD, x\bar{S}, \dots, x^{g-1}D, x^{g-1}\bar{S}, D.$$

Ces  $g$  feuillets forment la variété de recouvrement cyclique à  $g$  feuillets  $S_g$  de  $S$  ramifiée le long de  $k$ . Quoique la surface  $D$  ait joué un rôle prépondérant dans sa construction, on voit aisément que  $S_g$  est indépendant du choix de  $D$ . On peut également caractériser  $S_g$  par la propriété suivante indépendamment de la surface sous-tendue:  $S_g$  est une variété de recouvrement de l'espace euclidien ramifié le long du nœud à  $g$  feuillets; une courbe  $\omega$  dans  $S_g$ , correspondante à une courbe fermée  $\omega_0$  de l'espace euclidien n'est fermée que lorsque  $\omega_0$  et le nœud ont un coefficient d'enlacement divisible par  $g$ .

Pour calculer le *groupe d'homologie* de  $S_g$ , nous cherchons tout d'abord le groupe d'homologie de  $\bar{S}$ . Il est, pour cela, nécessaire d'avoir un système d'éléments générateurs ainsi qu'un système de relations spécifiques.

Comme courbes de base nous choisirons les suivantes: Traçons sur  $D$ , donc sur le bord gauche du feuillet  $\bar{S}$ ,  $2h$  paires de coupes conjuguées fermées simples.

$$a_1, a_2, \dots, a_{2h-1}, a_{2h}.$$

Chacune parcourt un ruban et sera orientée comme dans la figure 6. Soient  $xa_1, \dots, xa_{2h}$  les courbes correspondantes de  $xD$ . On voit aisément que ces  $4h$  courbes

$$a_1, \dots, a_{2h}, xa_1, \dots, xa_{2h}, \quad (1)$$

engendrent le groupe d'homologie de  $S$ .

Nous donnons sans démonstration les relations:

$$\begin{aligned} a_1 \sim & (\nu_{i2} a_1 - \nu_{i1} a_2) + \dots + (\nu_{i,2h} a_{2h-1} - \nu_{i,2h-1} a_{2h}) - \\ & - (\nu_{i2} xa_1 - \nu_{i1} xa_2) - \dots - (\nu_{i,2h} xa_{2h-1} - \nu_{i,2h-1} xa_{2h}) \\ & \text{(homologie en } \bar{S}, \quad i = 1, \dots, 2h), \end{aligned} \quad (2)$$

où  $\nu_{ik}$  désigne le coefficient d'enlacement du  $i$ -ième ruban avec le  $k$ -ième. Plus exactement: Nous considérons en projection les rubans  $a_i$  et  $a_k$  en tous les endroits où  $a_k$  passe sur  $a_i$ . Si  $a_k$  passe de gauche à droite sur  $a_i$ , nous donnerons à ce croisement l'indice  $+1$ , dans le cas contraire  $-1$  (fig. 9).  $\nu_{ik}$  est alors la

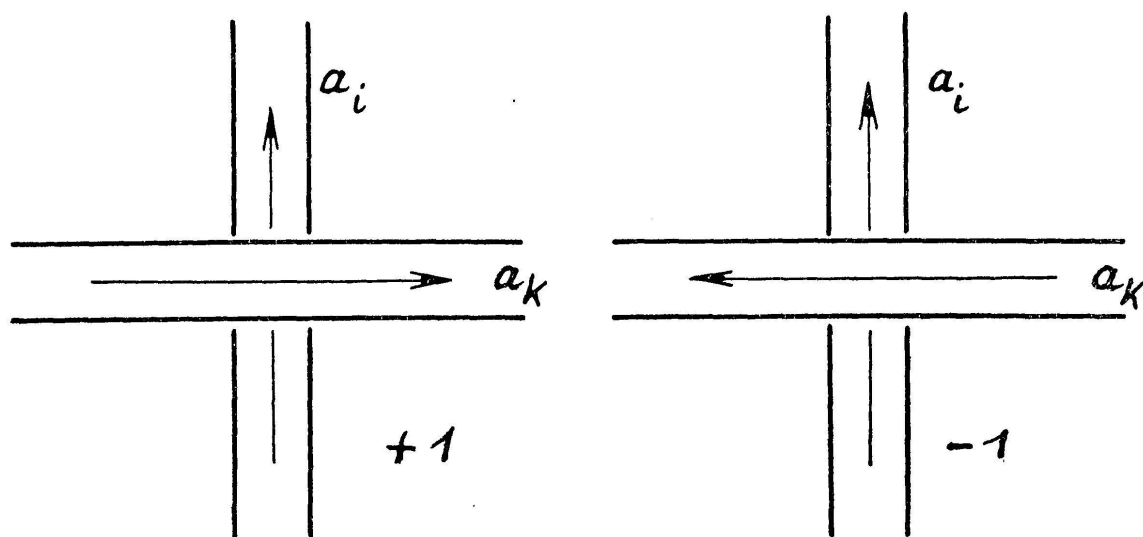


Fig. 9

somme de ces indices. Dans la figure 7 on a par exemple:  $\nu_{11} = -1$ ,  $\nu_{12} = 1$ ,  $\nu_{21} = 0$ ,  $\nu_{22} = 0$ . Il est possible d'écrire plus simplement la relation (2):

$$a_i \sim \sum_{k=1}^{2h} \gamma_{ik} (a_k - xa_k). \quad (2')$$



On peut considérer le symbole  $x$  qui jusqu'à présent n'avait été introduit que formellement, comme un opérateur du groupe d'homologie. On peut, en effet, l'interpréter comme le mouvement de superposition de  $S_\infty$  sur lui-même, transformant chaque feuillet dans le suivant. Cette représentation topologique de  $S_\infty$  sur lui-même conduit à un automorphisme du groupe d'homologie;  $x$  est donc un opérateur du groupe. En envisageant  $x$  sous cet angle, on peut prendre comme éléments générateurs les  $2h$  courbes  $a_1, \dots, a_{2h}$ , car les autres en découlent par l'opération  $x$ . De même les relations (6) découlent de (2') par l'application de  $x$ ; la matrice des coefficients de (2') est:

$$E - \Gamma + x\Gamma . \quad (7)$$

D'après un théorème de la théorie des groupes, le déterminant de cette matrice est un invariant du groupe avec opérateurs. Cet invariant n'est, il est vrai, déterminé qu'à une unité du domaine des coefficients près, c'est-à-dire qu'à  $\pm x^n$  près. Le déterminant

$$|E - \Gamma + x\Gamma| \quad (8)$$

est, à ce facteur arbitraire près, justement le polynôme  $L$  du nœud; son degré est évidemment  $\leq 2h$ .

Passons maintenant aux *invariants d'enlacement* de  $S_g$ . Pour calculer les invariants d'enlacement d'une variété quelconque orientable  $M^3$ , on a besoin de:

Un système d'éléments générateurs

$$a_1, \dots, a_m$$

du groupe d'homologie de dimension 1. On a entre les  $a_i$  certaines homologies

$$\sum \alpha_{ik} a_k \sim 0 .$$

Il existe donc des chaînes  $A_i$  à deux dimensions dont le bord est  $\sum \alpha_{ik} a_k$ . Soient maintenant  $a_1^*, \dots, a_m^*$  des courbes fermées resp. homologues à  $a_1, \dots, a_m$ , mais n'ayant aucun point commun avec elles.  $a_h^*$  n'a donc aucun point commun avec le bord de  $A_i$ . Sous ces conditions le coefficient d'intersection (*Schnittzahl*) est

$$\mathcal{S} (A_i, a_k^*) = \beta_{ik} .$$

Les matrices  $(\alpha_{ik})$  et  $(\beta_{ik})$  étant connues, on peut calculer les coefficients d'enlacements par un procédé purement algébrique. Dans le cas du recouvrement du nœud  $S_g$  la matrice  $(\alpha_{ik})$  devient :

$$(\alpha_{ik}) = (\Gamma - E)^g - \Gamma^g, \quad (9)$$

alors que la matrice  $(\beta_{ik})$  est

$$(\beta_{ik}) = (\Gamma - E)^g \Delta, \quad (10)$$

où  $\Delta$  est la matrice constante suivante :

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & -1 & . & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 0 & -1 \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Les formules (4), (8), (9), (10) montrent que le polynome L, le groupe d'homologie et les invariants d'enlacement de tous les recouvrements cycliques  $S_g$ , sont donnés par la matrice  $\Gamma$ , donc finalement par les coefficients d'enlacement  $\nu_{ik}$  des rubans de la surface D sous-tendue par k.*

On voit par là qu'il existe une infinité de nœuds, dont les invariants 2) et 3) coïncident. Car la position relative des rubans n'est déterminée en aucune façon par la connaissance des  $\nu_{ik}$ . Il est même possible de donner une infinité de positions de surface enrubannées, dont les  $\nu_{ik}$  sont les mêmes, mais qu'on ne peut déformer l'une dans l'autre. On peut en particulier construire des nœuds dont les invariants 2) et 3) sont ceux du cercle. C'est-à-dire qu'il existe des nœuds dont les recouvrements cycliques  $S_g$  sont des sphères ou des espaces de Poincaré. Il est alors nécessaire de considérer le groupe du nœud pour pouvoir les distinguer.

Pour terminer, disons encore un mot sur le genre du nœud. Il n'existe pas de procédé général pour calculer le genre d'un nœud. Par contre il est facile de trouver des limites pour le genre. Si le nœud est donné par sa projection plane, on peut immédiatement trouver une limite supérieure, en faisant passer une surface par le nœud; pour le faire on dispose d'un procédé très simple. Des limites inférieures seront données par les formules du groupe d'homologie et du polynome L. Si  $h$  est le genre du



nœud  $k$ , et si l'on a fait passer par  $k$  une surface de genre  $h$ , alors la matrice  $\Gamma$  est à  $2h$  lignes, et le polynome  $L$  aura au plus le degré  $2h$ . Donc :

$$\text{Degré du polynome } L \leq \text{double du genre du nœud.} \quad (11)$$

D'autre part le groupe d'homologie de  $S_g$  est engendré par  $2h$  courbes  $a_1, \dots, a_{2h}$ . On a donc :

$$\text{Nombre minimal des éléments générateurs du groupe d'homologie de } S_g \leq \text{double du genre du nœud.}$$

Si par hasard la limite inférieure coïncide avec la limite supérieure, on a le genre du nœud. Ce cas se présente pour la

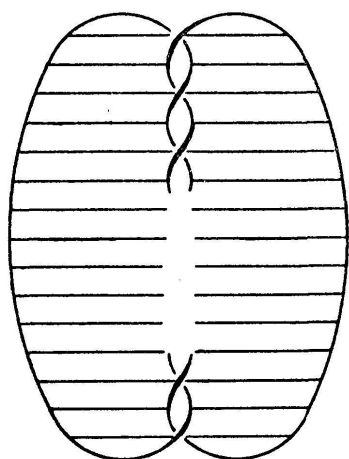


Fig. 10

tresse à deux brins avec  $m$  croisements ( $m$  impaire, dans la fig. 10). La surface hachurée de la figure 10 a le genre  $\frac{m-1}{2}$  qu'on trouve en comptant les points, les arêtes et les facettes. D'autre part, le groupe d'homologie du recouvrement  $S_m$  à  $m$  feuillets, possède exactement  $(m-1)$  coefficients de torsion de valeur 2; le nombre minimal des éléments générateurs est par conséquent  $m-1$ . Le nœud est donc de genre  $\frac{m-1}{2}$ . Comme  $m$  est

impair arbitraire, on a démontré par là l'existence de nœuds d'un genre quelconque. On trouvera de la même façon le genre des autres nœuds du tore ainsi que des 84 nœuds énumérés par Alexander et Briggs.