

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** RELATIONS ENTRE LA TOPOLOGIE ET LA THÉORIE DES  
INTÉGRALES MULTIPLES  
**Autor:** de Rham, Georges  
**Kapitel:** 3. — Principe de la démonstration du théorème I.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27312>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

d'une fonction uniforme sur une surface donnée  $S$ , dont le laplacien soit égal à une fonction donnée  $f$  telle que  $\int_S f d\sigma = 0$ .

### 3. — PRINCIPE DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME I.

Considérons, pour fixer les idées, une variété à 3 dimensions sur laquelle on a un cycle à 2 dimensions  $c^2$  non homologue à zéro. Il s'agit de construire une forme exacte de degré 2, régulière sur toute la variété, dont la période relative à  $c^2$  ne soit pas nulle. Une telle forme

$$\omega = A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

peut être considérée comme l'expression du débit élémentaire d'un courant électrique (stationnaire) de volume, son intégrale étendue à un champ  $c$  à 2 dimensions est alors le débit total à travers  $c$  et la condition que la forme soit exacte ( $\omega' = 0$  ou  $A'_x + B'_y + C'_z = 0$ ) exprime que le courant est conservatif. Notre problème consiste donc à construire un courant de volume, régulier et conservatif sur toute la variété, dont le débit total à travers  $c^2$  ne soit pas nul.

D'après le théorème de dualité de Poincaré, il existe un cycle à une dimension  $c^1$ , dont le nombre algébrique des points d'intersections avec  $c^2$  n'est pas nul:  $I(c^2, c^1) \neq 0$ . Imaginons que les lignes constituant  $c^1$  (lignes fermées et orientées) soient des fils métalliques parcourus par un courant électrique d'intensité constante égale à un. Le débit de ce courant à travers  $c^2$  est égal à  $I(c^2, c^1)$ , donc non nul. Ce courant est d'ailleurs conservatif (car  $c^1$  est fermé). On conçoit ensuite la possibilité d'étaler un peu ce courant, de manière qu'il remplisse une sorte de tube entourant  $c^1$ , avec une intensité de volume continue à l'intérieur du tube et nulle sur sa frontière. La forme  $\omega$ , égale au débit élémentaire de ce courant dans le tube et nulle en dehors, satisfait à toutes les conditions requises.

On voit que, dans l'espace ordinaire, une même entité physique (le courant électrique), est représentée dans un cas par un champ à une dimension (courant linéaire), dans un autre cas par une forme de degré deux (courant de volume). Cela

suggère l'idée que dans une variété à  $n$  dimensions  $V$ , un  $p$ -champ et une  $(n - p)$ -forme doivent être deux aspects d'une même notion plus générale, que j'appellerai courant à  $p$  dimensions. Telle est l'idée qui m'a conduit à la démonstration des trois théorèmes dont on vient de parler. Je vais maintenant esquisser la théorie de ces courants et montrer comment elle conduit de manière très naturelle à la théorie des résidus d'intégrales doubles.

4. — THÉORIE DES COURANTS.

DÉFINITIONS. — Un  $p$ -courant élémentaire est l'ensemble  $(c^{p+k}, \omega^k)$  d'un  $(p + k)$ -champ  $c^{p+k}$  et d'une  $k$ -forme  $\omega$  (définie au moins sur  $c^{p+k}$ ).  $p$  est la dimension du courant. Comme  $0 \leq p + k \leq n$  et  $0 \leq k \leq n$ , l'entier  $k$  ne peut prendre que les  $n - p + 1$  valeurs  $0, 1, \dots, (n - p)$ ; il y a  $(n - p + 1)$  types de  $p$ -courants élémentaires.

Un  $p$ -courant est la réunion d'un nombre fini de  $p$ -courants élémentaires.

Addition et multiplication par un nombre. — La somme  $C_1 + C_2$  de deux  $p$ -courants  $C_1$  et  $C_2$  est le  $p$ -courant formé par la réunion des  $p$ -courants élémentaires constituant  $C_1$  et  $C_2$ .

Le produit du  $p$ -courant élémentaire  $C = (c, \omega)$  par le nombre  $\lambda$  est le  $p$ -courant élémentaire  $C = (c, \lambda\omega)$ . Pour multiplier un courant quelconque par  $\lambda$ , on multipliera chacun des courants élémentaires qui le constitue par  $\lambda$ .

Conventions de simplification.

$$(c, \omega) = 0 \text{ si } c = 0 \text{ ou si } \omega = 0 \text{ sur } c .$$

$$(\lambda c, \omega) = \lambda (c, \omega) .$$

$$(c_1, \omega) + (c_2, \omega) = (c_1 + c_2, \omega) . \quad (c, \omega_1) + (c, \omega_2) = (c, \omega_1 + \omega_2) .$$

Produit de deux courants. — Le produit du  $p$ -courant élémentaire  $(c^{p+k}, \omega^k)$  par le  $q$ -courant élémentaire  $(c^{q+l}, \omega^l)$  est le  $(p + q - n)$ -courant élémentaire.

$$(c^{p+k}, \omega^k) (c^{q+l}, \omega^l) = (-1)^{k(n-q-l)} (c^{p+k} \cdot c^{q+l}, \omega^l \omega^k)$$