

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 35 (1936)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** RELATIONS ENTRE LA TOPOLOGIE ET LA THÉORIE DES  
INTÉGRALES MULTIPLES  
**Autor:** de Rham, Georges  
**Kapitel:** 4. — Théorie des courants.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27312>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

suggère l'idée que dans une variété à  $n$  dimensions  $V$ , un  $p$ -champ et une  $(n - p)$ -forme doivent être deux aspects d'une même notion plus générale, que j'appellerai courant à  $p$  dimensions. Telle est l'idée qui m'a conduit à la démonstration des trois théorèmes dont on vient de parler. Je vais maintenant esquisser la théorie de ces courants et montrer comment elle conduit de manière très naturelle à la théorie des résidus d'intégrales doubles.

4. — THÉORIE DES COURANTS.

DÉFINITIONS. — Un  $p$ -courant élémentaire est l'ensemble  $(c^{p+k}, \omega^k)$  d'un  $(p + k)$ -champ  $c^{p+k}$  et d'une  $k$ -forme  $\omega$  (définie au moins sur  $c^{p+k}$ ).  $p$  est la dimension du courant. Comme  $0 \leq p + k \leq n$  et  $0 \leq k \leq n$ , l'entier  $k$  ne peut prendre que les  $n - p + 1$  valeurs  $0, 1, \dots, (n - p)$ ; il y a  $(n - p + 1)$  types de  $p$ -courants élémentaires.

Un  $p$ -courant est la réunion d'un nombre fini de  $p$ -courants élémentaires.

Addition et multiplication par un nombre. — La somme  $C_1 + C_2$  de deux  $p$ -courants  $C_1$  et  $C_2$  est le  $p$ -courant formé par la réunion des  $p$ -courants élémentaires constituant  $C_1$  et  $C_2$ .

Le produit du  $p$ -courant élémentaire  $C = (c, \omega)$  par le nombre  $\lambda$  est le  $p$ -courant élémentaire  $C = (c, \lambda\omega)$ . Pour multiplier un courant quelconque par  $\lambda$ , on multipliera chacun des courants élémentaires qui le constitue par  $\lambda$ .

Conventions de simplification.

$$(c, \omega) = 0 \text{ si } c = 0 \text{ ou si } \omega = 0 \text{ sur } c .$$

$$(\lambda c, \omega) = \lambda (c, \omega) .$$

$$(c_1, \omega) + (c_2, \omega) = (c_1 + c_2, \omega) . \quad (c, \omega_1) + (c, \omega_2) = (c, \omega_1 + \omega_2) .$$

Produit de deux courants. — Le produit du  $p$ -courant élémentaire  $(c^{p+k}, \omega^k)$  par le  $q$ -courant élémentaire  $(c^{q+l}, \omega^l)$  est le  $(p + q - n)$ -courant élémentaire.

$$(c^{p+k}, \omega^k) (c^{q+l}, \omega^l) = (-1)^{k(n-q-l)} (c^{p+k} \cdot c^{q+l}, \omega^l \omega^k)$$

où  $c^{p+k} \cdot c^{q+l}$  est l'intersection de  $c^{p+k}$  avec  $c^{q+l}$  et  $\omega^l \omega^k$  le produit (extérieur) de  $\omega^l$  par  $\omega^k$ .

Le produit de deux courants quelconques s'obtient par la règle de distribution (tout courant étant la somme de courants élémentaires).

*Dérivé d'un courant.* — Le dérivé du  $p$ -courant élémentaire  $(c^{p+k}, \omega^k)$  est le  $(p-1)$ -courant

$$d(c^{p+k}, \omega^k) = (c, \omega') + (-1)^k (f(c), \omega)$$

où  $\omega'$  est la  $(k+1)$ -forme égale à la dérivée extérieure de  $\omega^k$  et  $f(c)$  le  $(p+k-1)$ -champ frontière du  $(p+k)$ -champ  $c^{p+k}$ .

Le dérivé d'un courant est la somme des dérivés des courants élémentaires qui le constituent.

*Indice d'un o-courant.* — On appellera *indice* du  $o$ -courant élémentaire  $C^0 = (c^k, \omega^k)$  le nombre

$$I(C^0) = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \int_{c^k} \omega^k .$$

L'indice d'un courant quelconque est égal par définition à la somme des indices des courants élémentaires qui le constituent.

Si  $k=0$ ,  $c^k$  est un  $o$ -champ, c'est-à-dire un système de points  $P_i$  (en nombre fini) affectés de coefficients  $k_i$ :  $c^0 = \sum_i k_i P_i$ ;

$\omega^k$  est une fonction de point  $\omega^0 = f(P)$  et le signe  $\int_{c^k} \omega^k$  est alors défini par

$$\int_{c^0} \omega^0 = \sum_i k_i f(P_i) .$$

PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS DÉFINIES. — a) Les  $p$ -courants forment un espace vectoriel.

b) La multiplication de deux courants est une opération distributive par rapport à l'addition, associative, et pseudo-commutative:  $C^p \cdot C^q = (-1)^{(n-p)(n-q)} C^q \cdot C^p$ ,  $p$  et  $q$  étant les dimensions de  $C^p$  et  $C^q$ .

c) La dérivation est une opération linéaire:  $d(\lambda C_1 + \mu C_2)$

$= \lambda dC_1 + \mu dC_2$ . Le second dérivé est toujours nul:  $d(dC) = 0$ . Le dérivé d'un produit est donné par la formule

$$d(C^p \cdot C^q) = C^p \cdot dC^q + (-1)^{n-p} dC^p \cdot C^q .$$

d) L'indice d'un  $o$ -courant est fonction linéaire de ce  $o$ -courant, et si  $C^0 = dC^1$ ,  $I(C^0) = I(dC^1) = 0$ .

REMARQUES. — a) La théorie précédente contient les deux théories des champs et des formes.

Appliquées à l'intérieur du système des courants du type  $(c, 1)$ , les opérations définies n'en font pas sortir et coïncident avec les opérations de la théorie des champs appliquées à  $c$ : la multiplication et la dérivation coïncident respectivement avec l'intersection et le passage à la frontière. L'indice d'un  $o$ -courant de ce type,  $I(c, 1)$ , est égal à la somme des coefficients des points du  $o$ -champ  $c$ , et si  $c = c^p \cdot c^{n-p}$ ,  $I(c, 1)$  est égal au nombre  $I(c^p \cdot c^{n-p})$  des points d'intersection de  $c^p$  avec  $c^{n-p}$ .

Appliquées à l'intérieur du système des courants du type  $(V, \omega)$ , les opérations définies n'en font pas sortir et coïncident avec les opérations de même nom de la théorie des formes appliquées à  $\omega$ . L'indice d'un  $o$ -courant  $(V, \omega)$  de ce type est égal (au signe près) à l'intégrale de la forme  $\omega$  étendue à  $V$ .

Nous conviendrons par suite de considérer  $(V, \omega)$  et  $\omega$  comme identiques, de même que  $(c, 1)$  et  $c$ .

Remarquons encore que, comme  $(c, \omega) = (c, 1)(V, \omega)$ , tout courant est une somme de produits d'un champ par une forme. Le  $n$ -courant  $(V, 1)$ , identique à la fois au  $n$ -champ  $V$  et à la  $o$ -forme  $1$ , joue le rôle d'unité dans la multiplication.

Dans le langage des algébristes, les systèmes des courants, des formes et des champs sont des algèbres, et l'algèbre des courants est le produit direct de l'algèbre des formes et de l'algèbre des champs.

b) Pour que cette notion de courant ne paraisse pas trop artificielle, indiquons une interprétation physique des 1-courants et des  $o$ -courants dans l'espace ordinaire.

Un courant électrique (stationnaire) peut toujours être représenté par un 1-courant. Les trois types possibles de 1-courants dans l'espace,  $(c^{k+1}, \omega^k)$  ( $k = 0, 1, 2$ ), représentent respec-

tivement les courants linéaires ( $k = 0$ ), superficiels ( $k = 1$ ), ou de volume ( $k = 2$ ).  $c^{k+1}$  est le support (à  $(k + 1)$  dimensions) du courant,  $\omega^k$  est le débit élémentaire à travers l'élément de variété à  $k$  dimensions tracé sur  $c^{k+1}$ .

Une distribution de masse dans l'espace est représentée par un  $o$ -courant. Les quatre types possibles de  $o$ -courants,  $(c^k, \omega^k)$  (pour  $k = 0, 1, 2, 3$ ) représentent respectivement les masses ponctuelles ( $k = 0$ ), linéaires ( $k = 1$ ), superficielles ( $k = 2$ ), ou de volume ( $k = 3$ ).  $c^k$  est le support des masses,  $\omega^k$  mesure la masse contenue dans un élément de  $c^k$ .

L'indice d'un  $o$ -courant a aussi une interprétation physique simple. Soit  $C^1$  le 1-courant qui représente un courant électrique,  $c^2$  un champ à 2 dimensions. Le produit  $(c^2, 1) \cdot C^1$  est un  $o$ -courant, son indice est le débit d'électricité à travers  $c^2$  (quel que soit le type de  $C^1$ , même s'il est une somme de courants des trois types).

Soit encore  $C^0$  le  $o$ -courant qui représente une distribution de masses,  $c^3$  un 3-champ. Le produit  $(c^3, 1) \cdot C^0$  est un  $o$ -courant dont l'indice est la quantité de masse contenue dans  $c^3$ . L'indice de  $C^0$  est la masse totale répartie dans tout l'espace.

Considérons enfin la dérivation. Si  $C^1$  est un 1-courant qui représente un courant électrique, son dérivé  $dC^1$  est le  $o$ -courant qui représente la répartition des sources (positives et négatives) d'électricité.

c) A tout  $(n - p)$ -courant  $C^{n-p}$  correspond une fonctionnelle linéaire de  $p$ -courant

$$F(C^p) = I(C^p \cdot C^{n-p}) .$$

Cela permet, dans des cas assez généraux, de déterminer le  $(n - p)$ -courant  $C^{n-p}$  par les valeurs de la fonctionnelle correspondante sur un certain ensemble de  $p$ -courants. C'est ainsi qu'une  $p$ -forme  $\omega$  est déterminée par les valeurs de l'intégrale  $\int_c \omega$  pour tout champ  $c$ .

Il faut remarquer toutefois que, l'intersection de deux champs pouvant être indéterminée, le produit  $C^p \cdot C^{n-p}$  et par suite l'indice  $I(C^p \cdot C^{n-p})$  ne sont pas déterminés pour tous les couples de courants  $C^p, C^{n-p}$ .