

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1936)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RELATIONS ENTRE LA TOPOLOGIE ET LA THÉORIE DES
INTÉGRALES MULTIPLES
Autor: de Rham, Georges
Kapitel: 5. — Théorie des résidus.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-27312>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

5. — THÉORIE DES RÉSIDUS.

Nous avons supposé que les formes ω introduites dans la théorie des courants étaient partout régulières sur la variété V . Si l'on admet des formes qui présentent des singularités, pour que les lois essentielles de la théorie subsistent, la définition du dérivé doit être complétée. Lorsque ω présente des singularités, le dérivé de (V, ω) se compose non seulement de (V, ω') — ce qui serait le cas si ω était régulière —, mais encore d'autres termes provenant des singularités de ω et qu'on peut appeler les résidus de ω .

Je vais examiner à ce point de vue les formes différentielles algébriques dans le domaine complexe, ce qui nous conduira à la théorie des résidus de Cauchy et de Poincaré. Cette étude est basée sur la formule suivante.

Soient C_1 et C_2 deux courants dont la somme des dimensions est $(n + 1)$, n étant la dimension de la variété considérée; $C_1 \cdot C_2$ est alors un 1-courant, et l'indice de son dérivé $d(C_1 \cdot C_2)$ est nul, ce qui donne

$$I(C_1 dC_2) = \pm I(C_2 dC_1) . \tag{A}$$

Cette formule est très importante. Si C_1 et C_2 sont des champs, elle traduit la pseudo-commutativité du coefficient d'enlacement des deux cycles dC_1 et dC_2 . Si C_1 et C_2 sont des formes, c'est la formule d'intégration par parties. Si C_1 est un champ et C_2 une forme, c'est la formule de Stokes. Dans les cas que nous allons examiner, elle se réduira aux formules des résidus de Cauchy et Poincaré.

Considérons d'abord une différentielle rationnelle $f(z) dz$ sur la sphère de Riemann S de la variable complexe z . Soient z_k ($k = 1, 2, \dots$) ses points singuliers, r_k les résidus correspondants. Nous définissons le dérivé du 1-courant $C^1 = (S, f(z) dz)$ par la formule

$$dC^1 = \sum_k (z_k, 2i\pi r_k) .$$

Soit c^2 un domaine sur S (ou 2-champ) de frontière c^1 ; c^2 est un 2-courant dont le dérivé est c^1 . Appliquons la formule (A). On a

$$C^1 \cdot dc^2 = (S, f(z) dz) \cdot (c^1, 1) = - (c^1, f(z) dz) ,$$

done

$$I(C^1 \cdot dc^2) = \int_{c^1} f(z) dz .$$

Ensuite

$$c^2 \cdot dC^1 = (c^2, 1) \cdot \sum_k (z_k, 2i\pi r_k) = \sum_k (c^2 \cdot z_k, 2i\pi r_k) .$$

Comme $c^2 \cdot z_k = z_k$ ou 0 suivant que z_k est à l'intérieur ou à l'extérieur de c^2 , il vient

$$I(c^2 \cdot dC^1) = 2i\pi \text{ (somme des résidus intérieurs à } c^2\text{)}$$

et la formule (A) se réduit à la formule des résidus de Cauchy. La formule $I(dC^1) = 0$ exprime que la somme des résidus est nulle.

Considérons ensuite un élément d'intégrale double

$$\omega = f(x, y) dx dy ,$$

$f(x, y)$ étant une fonction rationnelle, x et y des coordonnées non homogènes dans le plan projectif complexe V à 4 dimensions réelles. Sa dérivée est nulle, mais elle a des points singuliers qui forment un nombre fini de courbes algébriques (donc des 2-champs) S_1, S_2, S_3, \dots Ce sont les courbes polaires de la fonction $f(x, y)$ et éventuellement la droite de l'infini.

Poincaré a montré qu'à chacune de ces courbes est attachée une différentielle abélienne déterminée par ω . Si par exemple $f = \frac{P(xy)}{Q(xy)R(xy)}$, P, Q, R étant des polynômes, la différentielle attachée à la courbe $Q = 0$ est

$$\frac{2i\pi P \cdot dx}{R \frac{\partial Q}{\partial y}}$$

Soit ω_k la différentielle attachée à S_k . Nous définissons le dérivé du 2-courant $C^2 = (V, \omega)$ par la formule

$$dC^2 = \sum_k (S_k, \omega_k) .$$

Soit c^3 un champ à 3 dimensions sur V , dont la frontière c^2 ne rencontre pas les courbes singulières S_k . c^3 est un 3-courant dont le dérivé est c^2 . Appliquons la formule (A). On a

$$C^2 \cdot dC^3 = (V, \omega) \cdot (c^2, 1) = (c^2, \omega) ,$$

d'où

$$I(C^2 \cdot dC^3) = - \int_{c^2} \omega .$$

Ensuite

$$C^3 \cdot dC^2 = (c^3, 1) \cdot \sum_k (S_k, \omega_k) = \sum_k (c^3 \cdot S_k, \omega_k) ,$$

d'où

$$I(C^3 \cdot dC^2) = - \sum_k \int_{c^3 \cdot S_k} \omega_k$$

et la formule (A) devient

$$\int_{c^2} \int f(xy) dx dy = \pm \sum_k \int_{c^3 \cdot S_k} \omega_k .$$

C'est la formule de réduction (de Poincaré) d'une période polaire d'intégrale double à des périodes (polaires ou cycliques) des intégrales abéliennes attachées aux courbes S_k .

En résumé, si les résidus d'une intégrale simple attachée à une courbe algébrique apparaissent comme un système de points affectés de coefficients, les résidus d'une intégrale double attachée à une surface algébrique se présentent sous la forme d'un système de courbes algébriques affectées d'intégrales simples. Plus généralement, les résidus d'une intégrale p -uple attachée à une variété algébrique à n dimensions (complexes) apparaissent comme un système de variétés algébriques à $(n - 1)$ dimensions (complexes) affectées d'intégrales $(p - 1)$ -uples.