Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1939-1940)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR DES COURBES SPÉCIALES DÉFINIES PAR DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON INTÉGRABLES

Autor: Turrière, E.

Kapitel: Courbes définies par une relation entre OT et OM.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515775

Elle est réduite au type classique

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = k\xi^m$$

$$m = -\frac{4N}{2N+1}$$

N étant entier (N = 1). Le changement de variable

$$\xi = At^{\frac{2}{m+2}}, \qquad A^{m+2} = -\frac{(m+2)^2}{4k},$$

$$\eta = \frac{1}{u}\frac{du}{d\xi},$$

la transforme en l'équation de BESSEL:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{2n+1}{t}\frac{du}{dt} + u = 0 \;;$$

on est dans le cas d'intégration des fonctions de BESSEL d'indice $n = -\frac{3}{2}$,

$$k = -1, \qquad A = \frac{1}{27}.$$

4. — A signaler aussi, un cas d'intégration

$$y^m = \operatorname{tg} V, \qquad m = \text{const.}$$

par séparation des variables:

$$r^{m-1}\,dr = \sin^{-m}\theta \cdot d\theta\,.$$

Courbes définies par une relation entre OT et OM.

5. — Soit T la trace sur l'axe Ox de la tangente en M à une courbe. La condition

$$\lambda = OT = f(r),$$

entre la coordonnée axiale $\lambda = x - y\frac{dx}{dy}$ et le rayon vecteur r = OM, devient

$$r^2\frac{d\theta}{dy} = f(r),$$

$$\frac{dx}{x-f} = \frac{dr}{r - \frac{x}{r}f}.$$

En posant

$$x = \frac{r^2}{f} - \frac{1}{z} ,$$

l'équation prend la forme:

$$\frac{dz}{dr} = r\left(\frac{r^2}{f^2} - 1\right) \cdot z^2 (z + \mathrm{P}) ,$$

$$\mathrm{P} = \frac{rf' - 3f}{r^2 - f^2} , \qquad f' = \frac{df}{dr} .$$

Il y a séparation des variables, pour P constant.

Pour $\mathrm{P} = 0$, il suffit de prendre $f = r^3$:

$$\frac{1}{z^2} = r^2 + \frac{1}{r^2} - 2a ,$$

d'où la courbe:

$$r^2 \sin^2 \theta = 2(a - \cos\theta) ,$$

$$y^2 = 2(a - \cos\theta) ,$$

circulaire, du sixième degré.

Le cas de P constant correspond aux intégrales $f(r)$ d'une équation de Riccati

$$r\frac{df}{dr} = 3f + \mathrm{P}(r^2 - f^2) .$$

En posant alors

$$r = \frac{1}{\mathrm{PX}} , \qquad f = \frac{1}{\mathrm{P}} \cdot \frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}^3} ,$$

l'équation de Riccati prend la forme canonique

$$\boxed{\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}} = -1 + \frac{\mathrm{Y}^2}{\mathrm{X}^4} .}$$

Il y a lieu d'observer que le changement de variables

$$\mathrm{Y} = -i\mathrm{Y}_1 , \qquad \mathrm{X} = i\mathrm{X}_1 ,$$

lui donne la forme

$$\frac{d\mathrm{Y}_1}{d\mathrm{X}_1} = 1 + \frac{\mathrm{Y}_1^2}{\mathrm{X}_1^4} ,$$

obtenue plus haut pour l'équation correspondante de séparation des variables dans le problème de l'isochrone paracentrique; la transformation

$$X_1 = \frac{1}{3}\xi^{-\frac{1}{3}}, \qquad Y_1 = \frac{1}{9}\eta,$$

donne l'équation

$$\frac{d\eta}{d\xi} + \eta^2 = \xi^{-\frac{4}{3}},$$

intégrable par les fonctions de Bessel d'indice $-\frac{3}{2}$.

6. — Un autre cas d'intégration est celui des courbes définies par la condition:

$$\mathrm{OT} = k \cdot \mathrm{OM}.$$

L'équation correspondante

$$\frac{dr}{r - kx} = \frac{dx}{x - kr},$$

est homogène. Elle devient

$$k\frac{dr}{r} = \frac{1 - k\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta.$$

D'où:

$$y = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}}\frac{\theta}{2},$$

$$r\sin\theta = \operatorname{tang}^{\frac{1}{k}}\frac{\theta}{2},$$

$$2x = y\left(y^{-k} - y^{k}\right).$$

Ces courbes sont identiques aux *images d'Aoust des courbes ordinaires de poursuite.*