Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 40 (1951-1954)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS

Autor: Chern, Shiing-Shen

Kapitel: III

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515809

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 13.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

de M au point x. On a évidemment $\tau(x) \leqq [n/p(x)]$, le dernier nombre étant le plus grand entier $\leqq n/p(x)$.

Cela étant, on a le théorème local suivant, qui est dû à M. ALLENDOERFER [1], [4]: Deux variétés isométriques, dont les premiers espaces normaux sont de même dimension, ne diffèrent que par un mouvement (propre ou impropre), si l'une d'entre elles est de type $\geqq 3$.

Ce théorème peut être considéré comme un théorème de rigidité locale. Bien entendu, la condition sur le type est très forte.

III

9. — Pour mieux comprendre la géométrie des sous-variétés, il serait utile d'étudier avec plus de détails le cas d'une surface dans $E^4 (n = N = 2)$. Nous faisons une autre hypothèse simplificatrice en supposant que M est orientée. Alors l'application tangentielle est $\tilde{T}: M \longrightarrow \tilde{G}(2, 2)$. Dans ce cas on peut donner de cette dernière variété une description simple. En effet, soient $p_{\alpha\beta}$, $1 \leqq \alpha, \beta \leqq 4$, les coordonnées plückeriennes dans $G(2, 2)$. Ce sont les coordonnées homogènes assujetties aux conditions

$$p_{\alpha\beta} + p_{\beta\alpha} = 0 \, , \quad p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0 \, . \tag{36}$$

Nous les normalisons par la condition

$$\sum_{\alpha, \beta} p_{\alpha\beta}^2 = 2 \, . \tag{37}$$

Alors les coordonnées $p_{\alpha\beta}$ satisfaisant aux conditions (36), (37) peuvent être considérées des coordonnées dans $\tilde{G}(2, 2)$, de sorte que les deux plans orientés qui donnent le même plan non orienté aient des coordonnées différant par le signe. Introduisons des coordonnées nouvelles dans $\tilde{G}(2, 2)$ en posant

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{12} + p_{34} \, , & x_2 &= p_{23} + p_{14} \, , & x_3 &= p_{31} + p_{24} \, , \\ y_1 &= p_{12} - p_{34} \, , & y_2 &= p_{23} - p_{14} \, , & y_3 &= p_{31} - p_{24} \, . \end{aligned} \tag{38}$$

Avec ces coordonnées x_λ, y_λ, $1 \leqq \lambda \leqq 3$, les conditions (36) et (37) sont équivalentes aux conditions

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1 \, . \tag{39}$$

Ceci démontre que la variété $\tilde{G}(2, 2)$ est homéomorphe au produit cartésien de deux sphères S_x et S_y ordinaires. Comme $\tilde{G}(2, 2)$ peut être identifiée avec la variété des droites orientées de l'espace elliptique à trois dimensions, ce fait est à la base d'une représentation de Fubini et Study.

Fixons une orientation de S_x et S_y et désignons par M, S_x, S_y les cycles fondamentaux de ces variétés. Les invariants homologiques qu'on peut déduire de l'homomorphisme $\tilde{T}_*$ sont les entiers d_x, d_y définis par la condition $\tilde{T}_*(M) \sim d_x S_x + d_y S_y$, où $\tilde{T}_*$ désigne l'homomorphisme induit par $\tilde{T}$. On peut démontrer que [7], si les orientations de S_x et S_y sont convenablement choisies, on a $d_x = d_y$ et que la valeur commune est la moitié de la caractéristique d'Euler de M. La démonstration s'appuie sur l'étude de l'homéomorphisme σ introduit dans le n° 5, qui est dans notre cas un homéomorphisme de $\tilde{G}(2, 2)$ en elle-même. Son homomorphisme induit sur les cycles a l'effet de fixer un des cycles S_x et S_y et changer le signe de l'autre. Ce fait et le résultat $\overline{W}^2 = 0$ (à coefficients entiers) conduisent facilement à l'égalité $d_x = d_y$.

Pour exprimer les relations de ces résultats avec les invariants différentiels de M dans E^4, il faut déterminer dans $\tilde{G}(2, 2)$ des formes différentielles extérieures fermées Φ_1, Φ_2 duales aux cycles S_x et S_y, c'est-à-dire telles que

$$\int_{S_\alpha} \Phi_\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad 1 \leqq \alpha, \beta \leqq 2, \quad S_1 = S_x, \ S_2 = S_y, \tag{40}$$

ou δ_α^β est le symbole de Kronecker. Ces formes Φ_1, Φ_2 ne sont pas univoquement déterminées. Cependant on peut démontrer que les choix

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\omega_{13} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{24} - \omega_{13} \wedge \omega_{14} - \omega_{23} \wedge \omega_{24}\right\}, \\ \Phi_2 &= \frac{1}{4\pi}\left\{\omega_{13} \wedge \omega_{23} + \omega_{14} \wedge \omega_{24} + \omega_{13} \wedge \omega_{14} + \omega_{23} \wedge \omega_{24}\right\}, \end{aligned} \tag{41}$$

satisfont aux conditions (40). On en déduit les formules intégrales suivantes

$$\frac{1}{2\pi}\int_M K\,d\,V = \chi(M) \ , \tag{42}$$

$$\int_M (A_{311}A_{412} - A_{312}A_{411} + A_{321}A_{422} - A_{322}A_{421})\,d\,V = 0 \ .$$

Ces formules ont été données pour la première fois par M. BLASCHKE [3].

L'étude de la variété $\tilde{G}(2, 2)$ conduit aussi à un résultat, dû à M. WU WEN-TSUN, qui a une conséquence géométrique intéressante. C'est le problème de considérer une courbe paramétrique fermée simple dans $G(2, 2)$ et de voir si elle est la projection d'une telle courbe dans $\tilde{G}(2, 2)$. Une telle courbe dans $\tilde{G}(2, 2)$ peut être donnée par $(x(t), y(t))$, $0 \leqq t \leqq 1$, où $x(t) \in S_x$, $y(t) \in S_y$, et $x(0) = \pm x(1)$, $y(0) = \pm y(1)$, en désignant par $-x(1)$, $-y(1)$ respectivement les points antipodes de $x(1)$, $y(1)$ dans S_x, S_y. M. WU WEN-TSUN a démontré que si, pour deux valeurs différentes quelconques t', t'' de t, $(t', t'') \neq (0, 1)$, les plans correspondants dans $G(2, 2)$ n'ont que le point O en commun, alors la courbe est la projection d'une courbe fermée simple dans $\tilde{G}(2, 2)$. Interprété dans la géométrie elliptique réglée, cela veut dire qu'une surface réglée dans un espace elliptique à trois dimensions est toujours orientable. Elle est donc homéomorphe à un tore [1].

10. — Je termine cette conférence par quelques questions naturelles:

A) Trouvez des invariants des sous-variétés relatifs à l'homotopie régulière définie dans le n° 1. En particulier, y a-t-il des paires de sous-variétés homéomorphes à deux dimensions dans un espace euclidien à quatre dimensions qui ne sont pas régulièrement homotopes ?

B) Y a-t-il d'autres conditions nécessaires que les conditions déjà connues pour que l'application $T: M \longrightarrow G(n, N)$ soit une application tangentielle ?

C) Dans l'espace euclidien à quatre dimensions y a-t-il une surface compacte à courbure gaussienne toujours négative ?

[1] M. H. HOPF m'a fait remarquer que ce théorème est un corollaire d'un théorème plus général, à savoir qu'il n'est pas possible de plonger topologiquement la bouteille de Klein dans l'espace projectif réel à trois dimensions.