Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 40 (1951-1954)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA GÉOMÉTRIE DES SOUS-VARIÉTÉS D'UN ESPACE EUCLIDIEN A PLUSIEURS DIMENSIONS

Autor: Chern, Shiing-Shen

Anhang: Appendice.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515809

Appendice.

Nous nous proposons de donner ici les formules concernant les courbures $K(x)$ et $K^*(x)$ et une démonstration du théorème suivant, énoncé dans le nº 6: L'inégalité (32) entraîne que la variété compacte M a ses nombres de Betti modulo 2 tous nuls pour les dimensions 1, 2, ..., $n-1$.

Nous utilisons les notations du texte. Désignons par $v = \sum_s v_s e_s$ un vecteur unitaire normal. Alors la forme (13) est la seconde forme fondamentale de la projection orthogonale $M(v)$ de M dans l'espace linéaire à $n+1$ dimensions déterminé par v et par le plan tangent à M en x. Par définition, la courbure $G(x, v)$ de Gauss-Kronecker de $M(v)$ est égale au déterminant:

$$G(x, v) = \left| \sum_s v_s A_{sij} \right| . \tag{43}$$

Pour calculer l'intégrale dans (23) il faut développer ce déterminant. Le développement sera un polynome homogène de degré n en v_s, dont un terme général est de la forme

$$\pm v_{s_1} \dots v_{s_n} A_{s_1 i_1 j_1} \dots A_{s_n i_n j_n} = \pm v_{t_1}^{\lambda_1} \dots v_{t_k}^{\lambda_k} A_{s_1 i_1 j_1} \dots A_{s_n i_n j_n} ,$$

où les indices $t_1, \dots, t_k$ sont tous distincts. Pour qu'un terme donne une valeur non nulle dans l'intégrale (23) il faut que les exposants $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ soient tous pairs. On est conduit ainsi à la démonstration du résultat que l'intégrale (23) est nulle si n est impair et égale à $K(x)$ si n est pair.

Pour exprimer l'élément de volume sur l'hypersphère de rayon unité autour de l'origine O, avec le point courant v, on prend un repère $a_1, \dots, a_{n+N}$, dont le dernier vecteur a_{n+N} est identique à v. Alors l'élément de volume est donné par l'expression

$$\prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t \, dv) = \prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t \, da_{n+N}) ,$$

où le produit est au sens du produit extérieur. Il est sous-entendu que ce produit est indépendant du choix des $n+N-1$ premiers vecteurs. Dans le cas présent où v est un vecteur normal en $x \in M$ nous choisissons $a_i = e_i(x)$ et posons

$$a_r = \sum_s u_{rs} e_s(x) ,$$

de sorte que $u_{n+N,s} = v_s$. On trouve alors

$$da_{n+N} = dv = \sum_s dv_s \cdot e_s + \sum_s v_s de_s ,$$

d'où on déduit

$$dv \cdot a_i = \sum_s v_s \omega_{si} = - \sum_{s,j} v_s A_{sij} \omega_j ,$$

$$dv \cdot a_r = \sum_s dv_s u_{rs} + \sum_{s,t} v_s u_{rt} \omega_{st} .$$

Il s'en suit que

$$\prod_{1 \leq t \leq n+N-1} (a_t dv) = \pm \left| \sum_s v_s A_{sij} \right| d\sigma_{N-1} dV .$$

Il s'agit d'intégrer la valeur absolue de cette expression pour tous les vecteurs normaux unitaires en tous les points $x \in M$. Notre discussion dans le n° 6 implique que cette intégrale est $\geq 2c_{n+N-1}$. Utilisant l'expression (30) pour la courbure totale $K^*(x)$, on obtient l'inégalité (31).

Maintenant supposons que l'inégalité (32) soit valable. Cela implique que les directions auxquelles la fonction coordonnée n'a qu'un maximum et un minimum ont une mesure positive. Il s'ensuit qu'il y a une fonction coordonnée non constante qui n'a qu'un maximum et un minimum. Des inégalités de Morse résulte alors l'énoncé au début de cet appendice.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Allendoerfer, C. B., Rigidity for spaces of class greater than one, *Amer. J. Math.* 61, 633-44 (1939).
[2] —— and Weil, A., The Gauss-Bonnet theorem for Riemannian polyhedra, *Trans. Amer. Math. Soc.* 53, 101-129 (1943).
[3] Blaschke, W., Sulla geometria differenziale delle superficie S_2 nello spazio euclideo S_4, *Ann. Math. Pura Appl.* (4), 28, 205-209 (1949).
[4] Chern, S., On a theorem of algebra and its geometrical application, *J. Indian Math. Soc.* 8, 29-36 (1944).