

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 40 (1951-1954)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'« INDÉFINIMENT » MATHÉMATIQUE  
**Autor:** Lorent, Henri  
**Kapitel:** II  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515810>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

il est lobatchevskien. Mais dans les deux derniers cas, il ne le restera que dans la mesure où sa règle — dont l'arête est une géodésique du plan — lui permet de tracer celles de la sphère ou de la pseudosphère avec une approximation tolérable. Il ne s'en accommodera d'ailleurs que si ses dessins, ses « plans » cotés permettent au travailleur qui les exécute un résultat suffisant; dans la mécanique de précision, par exemple, une tolérance de 1/100 millimètre constitue une erreur mathématique avec un résultat satisfaisant pour le praticien.

Concluons cette première partie de notre note par quelques lignes de Riemann: <sup>1</sup>

«... On peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. Le plus important, pour notre but actuel, est celui qu'Euclide a pris pour base. Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses. On peut donc étudier leur probabilité, qui est certainement très considérable dans les limites de l'observation, et juger d'après cela du degré de l'extension de ces faits en dehors de ces mêmes limites, tant dans le sens des immensurablement grands que dans celui des immensurablement petits.» <sup>2</sup>

\* \* \*

## II

7. — Passons à un autre ordre d'idées; nous retrouvons *indéfiniment* en calcul intégral, en mesurant les lignes et les surfaces courbes <sup>3</sup>.

<sup>1</sup> B. RIEMANN, *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*, mémoire publié par Dedekind dans le tome XIII des *Mémoires de la Société royale des Sciences de Goettingen* (1867), traduit par J. Houël, p. 2 du tiré-à-part; ou *Œuvres mathématiques* trad. Laugier, p. 381 (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

<sup>2</sup> On lira avec intérêt la brochure de M. P. BARBARIN: *Pour le centenaire de la Géométrie non euclidienne* (Buenos-Aires, Editions Coni, 1931). On y trouvera les portraits des géomètres (dont deux Belges: J. de Tilly et P. Mansion) qui ont marqué dans l'étude de cette géométrie; du même auteur: *La Géométrie non euclidienne*, 3<sup>e</sup> édit. (Édit. Scientia, Paris, Gauthier-Villars, 1928).

<sup>3</sup> Une première rédaction de ce § II a paru dans le *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liège* (numéro de mars 1950) sous le titre: « Un postulat implicite de la théorie des ensembles ».

Prenons pour exemple l'aire plane OABC, de mesure  $S$ , dans le plan d'axes rectangulaires; aire ayant sa base  $OA = a$  sur  $OX$ , limitée aux ordonnées  $OC = l_1$  et  $AB = l_2$  et à l'arc  $CB$  d'une courbe uniformément continue. Cette aire est l'ensemble, de la puissance du continu, des ordonnées des points de son arc.

La solution classique du problème est la suivante: partageons la base  $OA$  en un certain nombre de segments  $\Delta x$ ; sur les ordonnées initiale et finale de chaque  $\Delta x$ , construisons un rectangle ayant pour hauteur la plus petite ordonnée  $y_1$  de ce  $\Delta x$ , et un autre dont la hauteur est l'ordonnée la plus grande  $y_2$  du même intervalle. La somme  $S_1$  des premiers de ces rectangles est une partie de l'aire  $S$ , la somme  $S_2$  des seconds débordé l'aire  $S$ ; donc:

$$S_1 < S < S_2, \quad \text{avec} \quad |S_2 - S_1| = |l_2 - l_1| \Delta x .$$

Puis répétons ces constructions en augmentant le nombre des intervalles  $\Delta x$ , et ce *indéfiniment*; les sommes  $S_1$  augmentent, les sommes  $S_2$  diminuent, leur différence ayant une limite nulle lorsque  $\Delta x$  décroît indéfiniment; on en conclut que:

$$S = \lim_0^a \sum y_1 \Delta x = \lim_0^a \sum y_2 \Delta x ,$$

ce que l'on écrit  $S = \int_0^a y dx$ .

On a donc conclu, de la connaissance d'ensembles dénombrables d'ordonnées, à un ensemble d'ordonnées ayant la puissance du continu; à chaque état de  $S_1$  et de  $S_2$ , on a pris en considération deux ordonnées fixes  $l_1$  et  $l_2$  et un nombre fini d'ordonnées variables égal à celui des intervalles  $\Delta x$  diminué d'une unité.

Déjà, avant la théorie des ensembles, des esprits rigoureux s'étaient demandé: la conclusion quant à  $S$  ne dépend-elle pas du mode de multiplication du nombre des intervalles  $x$ ?<sup>1</sup>

Un premier mode est tel qu'à chaque multiplication les ordonnées en cause à la précédente soient conservées; par

<sup>1</sup> Voir par exemple E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, 3<sup>e</sup> édit., t. I, p. 172; ou S. CARRUS, *Cours de calcul différentiel et intégral*, livre I, p. 270.

exemple ces nombres sont 2, 4, 8, 16, ...  $2^n$ , ... etc. Notre maître P. Mansion, dans son cours oral, dénommait ce mode *concordant avec soi-même*.

Un second mode de multiplication ne conserve aucune des ordonnées en cause à chaque étape; ces nombres seraient, par exemple, les nombres premiers successifs 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ... formant un ensemble dénombrable, comme on le sait depuis Euclide.

Enfin, un troisième mode de multiplication conserverait une partie seulement des ordonnées de chaque étape.

On peut concevoir des multiplications successives en nombre aussi grand qu'on le veut, *indéfiniment*, toutes mettant en cause un ensemble fini d'ordonnées de l'aire S.

Si l'on opérât de même sur l'ensemble continu des segments d'une droite OX, en en retranchant des segments successifs jusqu'à un point P, il subsisterait une demi-droite PX, c'est-à-dire que la puissance du résidu serait celle de la demi-droite OX tout entière. Généralisant ce fait, la théorie des ensembles démontre que *la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable*, et que *d'un ensemble ayant la puissance du continu, on peut enlever un ensemble dénombrable d'éléments sans qu'il cesse d'avoir la puissance du continu*<sup>1</sup>.

La théorie classique de l'intégrale S fait mieux; d'un ensemble ayant la puissance du continu elle enlève un ensemble dénombrable d'ensembles *finis* d'ordonnées, négligeant un résidu qui conserve la puissance du continu.

Pareil saut n'est assuré de réussir que parce qu'un jugement *intuitif*, fondé sur la vue d'une figure, est admis comme vrai — tel que fut le postulatum d'Euclide. La formule pourrait en être un postulat à introduire dans la théorie des ensembles, postulat formulé comme suit: *soit un ensemble dénombrable d'ensembles finis dénombrables ( $E_1$ ) extraits d'un ensemble (E) qui a la puissance du continu; si tous les ensembles ( $E_1$ ) ont une propriété commune, cette propriété appartient aussi à l'ensemble (E)*.

Dans notre exemple de l'aire S, la propriété commune est celle qui permet le passage à la limite.

<sup>1</sup> Voir E. BOREL, *Éléments de la théorie des ensembles*, pp. 15 et 38 (Paris, Editions Albin Michel, 1949) et la note à la fin du texte.

Le postulat impliquerait que, dans le cas de l'aire  $S$  et les cas analogues, tout élément de l'ensemble continu  $(E)$  peut être atteint par des sous-ensembles  $(E_1)$ , quel que soit le mode de prélèvement de ces sous-ensembles.

Dans son livre cité (p. 232-235), E. BOREL témoigne d'une certaine inquiétude quant à la validité des raisonnements par lesquels on cherche à mesurer un ensemble qui a la puissance du continu. Le postulat ci-dessus est-il de nature à formuler cette inquiétude, et, peut-être à exprimer un caractère hypothétique ou empirique (aurait peut-être dit Riemann) de l'état actuel de la théorie des ensembles ?

#### NOTE AU N° 7

Peut-on épuiser l'ensemble dénombrable des nombres entiers en en détachant des sous-ensembles dénombrables ? Son dédoublement en termes pairs et termes impairs, en termes multiples de  $n$  et termes non multiples de  $n$  semble justifier une réponse affirmative; mais le second sous-ensemble est défini par un caractère négatif. Procédons par un mode positif de formation des sous-ensembles dénombrables.

Formons les sous-ensembles de multiples des nombres premiers (ceux-ci termes d'un ensemble transfini). Nous aurons successivement le sous-ensemble des nombres pairs: 2, 4, 6, 8, ...; celui des multiples de 3 non multiples de 2: 3, 9, 15, 21, ...; celui des multiples de 5 non multiples ni de 2, ni de 3: 25, 35, 55, 65, ...; et ainsi de suite.

Le sous-ensemble des multiples de  $n$  premier non multiples des nombres premiers moindres que  $n$  commence par  $n^2$ ; on voit que, quel que soit le nombre premier auquel on est arrivé, le sous-ensemble correspondant reste dénombrable. Pour ce mode de formation des sous-ensembles, la réponse à notre question est donc négative.

Mais cette réponse est positive pour un autre mode de formation de ces sous-ensembles: car l'ensemble des nombres entiers dont l'expression chiffrée est terminée par 1 est transfini dénombrable; de même celui des nombres terminés par 2, 3, ..., 9, 0, et ces dix sous-ensembles épuisent l'ensemble des nombres entiers. Ils seraient douze si l'on écrivait les entiers dans la numération à base 12.

Les considérations précédentes donneraient-elles à un jeune lecteur une première idée de la richesse de la notion d'ensemble transfini dénombrable ? Nous l'espérons. Exprimons les faits exemplaires que nous venons de constater: *un ensemble dénombrable peut n'être pas épuisé par l'extraction d'un ensemble dénombrable de ses sous-ensembles dénombrables, tandis qu'il peut l'être par un nombre fini de pareils sous-ensembles.* Énoncé à rapprocher de celui du n° 7 emprunté à E. Borel.