

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 40 (1951-1954)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROPOS DU TRANCHET D'ARCHIMÈDE
Autor: Thébault, Victor
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-515811>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

A PROPOS DU TRANCHET D'ARCHIMÈDE

PAR

Victor THÉBAULT, Tennie (France).

Nous avons donné ici même deux articles relatifs à cette figure universellement connue et qui sert souvent de thème à des questions d'examens, sans avoir pour autant épuisé le sujet ¹. La présente note y revient avec une configuration plus générale que celle envisagée par ARCHIMÈDE.

1. — Aux extrémités A, B d'une corde donnée d'un cercle (O), de rayon R, on trace deux cercles arbitraires (O₁), (O₂), de rayons R₁, R₂, tangents intérieurement au cercle (O) en A, B, et les cercles (ω₁), (ω₂), de rayons ρ₁, ρ₂, tangents à la fois aux cercles (O), (O₁), (O₂); puis on pose

$$OO_1 = a, \quad OO_2 = b, \quad \theta = \text{angle}(AB, AO), \quad \varphi = \text{angle}(O\omega_1, Oz).$$

THÉORÈME. *On a la relation*

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{\cos^2 \theta} \cdot \left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \left(\frac{1 + \sin^2 \theta}{R} \right) \right] \quad (1)$$

entre les éléments de la figure (fig. 1).

Dans chacun des triangles Oω₁O₂, Oω₁O₁, on obtient, d'abord,

$$\begin{aligned} \overline{O_2\omega_1}^2 &= \overline{OO_2}^2 + \overline{O\omega_1}^2 + 2OO_2 \cdot O\omega_1 \cos(\varphi - \theta) \\ \overline{O_1\omega_1}^2 &= \overline{OO_1}^2 + \overline{O\omega_1}^2 - 2OO_1 \cdot O\omega_1 \cos(\varphi + \theta), \end{aligned}$$

¹ *L'Ens. math.*, vol. 33, 1934, pp. 349-359; vol. 34, 1935, pp. 309-324.

Il en résulte l'équation du second degré en ρ_1

$$[(a^2 + b^2) + 2ab \cos \theta] R^2 - 2ab(a + b) R \cos^2 \theta - (ab \sin \theta \cos \theta)^2 \cdot \rho_1 - 2ab R \cos^2 \theta [(a + b) R - ab(1 + \sin^2 \theta)] \cdot \rho_1 + (abR \cos^2 \theta)^2 = 0 \quad (2)$$

dont les racines donnent les mesures des rayons ρ_1, ρ_2 des cercles $(\omega_1), (\omega_2)$. Des relations classiques entre la somme et le produit des racines de cette équation, on déduit l'égalité (1) qui, pour $\theta = 0$, se réduit à la formule bien connue¹

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{R},$$

lorsque la corde AB se confond avec un diamètre du cercle (O). (*Tranchet d'ARCHIMÈDE.*)

COROLLAIRE. Si la somme $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ conserve une valeur constante, il en est de même de la somme $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$ et, dans cette hypothèse, la droite $O_1 O_2$ passe par un point fixe.

La constance des deux sommes provient de la formule (1). D'autre part, les cercles $(\omega_1), (\omega_2)$ sont les transformés du cercle (O) par l'inversion de module $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$, dont le centre coïncide avec le pôle P de la corde AB par rapport au cercle (O), et la droite $O_1 O_2$ passe par un point fixe situé sur OP.

THÉORÈME. Les centres de similitude S_1, S_2 des cercles $(\omega_1), (\omega_2)$ avec le cercle (O) sont situés sur l'axe radical des cercles $(O_1), (O_2)$ et les cercles de centres S_1, S_2 orthogonaux aux cercles $(O_1), (O_2)$ sont tangents au cercle (O).

Il suffit, en effet, d'appliquer le théorème de STEWART au triangle $O\omega_1 O_1$ et à la céviene $O_1 S_1$ qui partage le segment $O\omega_1$ dans le rapport $OS_1 : O\omega_1 = R : \rho_1$ pour obtenir, après réductions et par analogie, les expressions

$$(P_1) = \left(\frac{2R\rho_1}{R + \rho_1} \right)^2, \quad (P_2) = \left(\frac{2R\rho_2}{R + \rho_2} \right)^2$$

des puissances des points S_1, S_2 par rapport aux cercles $(O_1), (O_2)$. De plus, les rayons des cercles de centres S_1, S_2 orthogonaux

¹ *Journal de BOURGET*, 1878-287, question 113.

aux cercles (O_1) , (O_2) ont pour mesures

$$\frac{2R\rho_1}{R + \rho_1} = R - \frac{R(R - \rho_1)}{R + \rho_1} = R - OS_1 \quad \text{et} \quad R - OS_2,$$

ce qui achève d'établir la proposition.

THÉORÈME. *Si l'on trace des cercles (O_1) , (O_2) tangents au cercle (O) en A , B et des cercles (O'_1) , (O'_2) tangents au cercle (O) en A , B , de manière que $OO_2 = AO'_1$, $OO_1 = BO'_2$, les cercles tangents aux cercles (O) , (O_1) , (O_2) et (O) , (O'_1) , (O'_2) sont tangents au cercle (O) aux mêmes points.*

En effet, les points de contact du cercle (O) avec les cercles (ω_1) , (ω_2) tangents aux cercles (O) , (O_1) , (O_2) coïncident avec les contacts des tangentes au cercle (O) menées par le point $S \equiv (AB, O_1 O_2)$ avec celui-ci et qui se confondent nécessairement avec les points de contact du cercle (O) avec les cercles (ω'_1) , (ω'_2) tangents aux cercles (O) , (O'_1) , (O'_2) , car les points A , B étant antihomologues sur les cercles (O_1) et (O_2) , (O'_1) et (O'_2) , les droites AB , $O_1 O_2$, $O'_1 O'_2$ sont concourantes.

2. — Dans ce qui suit, on suppose que le cercle (O) et la corde AB restent fixes, tandis que les cercles (O_1) , (O_2) sont variables et se coupent en un point C qui se déplace sur la corde AB entre A et B .

Dans ces hypothèses, il est clair que les cercles (O_1) , (O_2) se rencontrent sous un angle constant $(OB, AO) = 2\theta'$ (figs. 1-2).

D'autre part, par l'inversion i de pôle A , dont la puissance est $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$, les points B , C s'échangent, le cercle (O_2) se transforme en lui-même, tandis que les cercles (O_1) , (O) se changent en deux droites Bx , Cy perpendiculaires à la droite AO , dont la première coupe le cercle (O_2) sous l'angle $2\theta'$, alors que la seconde est tangente au cercle (O_2) en C ; les cercles (ω_1) , (ω_2) tangents aux cercles (O) , (O_1) , (O_2) se transforment en deux cercles égaux (ω'_1) , (ω'_2) , de rayon $\rho'_1 = \rho'_2$, tangents au cercle (O_2) et aux droites Bx , Cy .

THÉORÈME. *Les cercles (ω_1) , (ω_2) enveloppent le cercle (O) et, chacun, un cercle (Γ_1) , (Γ_2) et leurs centres ω_1 , ω_2 décrivent,*

chacun, une ellipse (E_1) , (E_2) ayant pour foyer commun le centre O du cercle (O) et pour second foyer le centre Γ_1 , Γ_2 du cercle (Γ_1) , (Γ_2) .

Il suffira d'examiner ce qui se passe pour le cercle (ω_1) . Si l'on désigne par D , F les points de rencontre de la droite $O_2 C$ avec la droite Bx et la parallèle à celle-ci menée par le centre ω'_1 du cercle (ω'_1) , d'après ce qui précède, on obtient les relations

$$O_2 D = R_2 \cos 2\theta' , \quad 2\rho'_1 = CD = CO_2 + O_2 D = R_2 \cdot (1 + \cos 2\theta') , \\ O_2 F = FD + DO_2 = \rho'_1 - O_2 D = \frac{R_2}{2} (1 - \cos 2\theta') ,$$

dont il résulte que le rapport $\frac{O_2 F}{O_2 C}$ et, par suite, le rapport $\frac{FC}{F\omega'_1}$, conservent des valeurs constantes. Le triangle $O_2 \omega'_1 C$ reste donc semblable à lui-même quand le point C varie sur AB .

L'inversion i intervertit les points B , C et dans cette seconde figure, si A , B sont des points fixes, le centre ω'_1 du cercle (ω'_1) décrit une droite fixe Bt_1 passant par B . La seconde tangente Bu_1 à ce cercle est donc fixe. Dès lors, dans la figure initiale, lorsque C varie entre A et B , le cercle (ω_1) reste tangent aux deux cercles fixes (O) , (Γ_1) inverses des droites $By \equiv Cy$ et Bu_1 . Puisque le cercle (ω_1) touche le cercle (O) intérieurement et le cercle (Γ_1) extérieurement, son centre décrit une ellipse (E_1) de foyers O et Γ_1 . Il est évident que les enveloppes du cercle (ω_1) et le lieu de son centre ω_1 sont composés des arcs de (O) , (Γ_1) , (E_1) situés au-dessus de AB .

COROLLAIRE. *Le cercle (γ) transformé d'une droite arbitraire $B\Delta$ située à l'intérieur de l'angle des tangentes By , Bu_1 au cercle (ω'_1) de la seconde figure, par l'inversion i , rencontre les cercles correspondants (ω_1) de la première sous un même angle.*

Car la droite $B\Delta$ coupe les cercles (ω'_1) sous un même angle. En particulier, le cercle (γ) qui correspond à la droite Bt_1 coupe orthogonalement tous les cercles (ω_1) , lorsque C varie entre A et B .

3. — Supposons maintenant que le point C reste fixe entre A et B et modifions légèrement les notations. Soient (ω_1) , (ω_2) ,

$(\omega_3), \dots, (\omega_n)$ les cercles, de rayons $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, tangents respectivement aux trois cercles $[(O), (O_1), (O_2)], [(O), (O_1), (\omega_1)], [(O), (O_1), (\omega_2)], \dots, [(O), (O_1), (\omega_{n-1})]$.

THÉORÈME. *Le centre ω_k , ($1 \leq k \leq n$), de l'un des cercles de la couronne de cercles $(\omega_1), (\omega_2), \dots, (\omega_n)$ décrit une ellipse (E_k) ayant pour foyers les centres O, O_1 des cercles $(O), (O_1)$ et un sommet en A .*

Car

$$OO_k + O_1O_k = R - \rho_k + R_1 + \rho_k = R + R_1 ;$$

de plus, (E_k) passe par le point A qui est une position limite du centre ω_k du cercle (ω_k) .

Les centres des cercles de la couronne de cercles déterminée par les cercles $(O), (O_1)$, au-dessous de AB , appartiennent aussi à l'ellipse (E_k) . Ceux des cercles des couronnes de cercles relatives aux cercles $(O), (O_2)$, au-dessus et au-dessous de AB , sont situés sur une autre ellipse de foyers O, O_2 ayant un sommet en B .

NOTES. — 1. Si l'on transforme la figure par l'inversion i , les cercles (ω_k) se changent en des cercles égaux (ω'_k) dont les centres ω'_k sont alignés sur une perpendiculaire à la droite AO . Le cercle (γ) transformé d'une droite arbitraire située entre les tangentes By et Bu_1 à ces cercles, rencontre les cercles (ω_k) sous le même angle. En particulier, le cercle transformé de leur ligne des centres $B\omega'_k$ est orthogonal aux cercles (ω_k) .

2. Lorsque le point C varie entre A et B , les cercles (ω_k) envisagés se transforment par l'inversion i en une suite de cercles (ω'_k) dont le cercle (ω'_1) considéré au paragraphe 2 fait partie. La tangente Bu_k relative au cercle (ω'_k) , de rang k , de cette suite reste fixe; de sorte que le cercle (ω_k) qui lui correspond enveloppe le cercle (O) et un cercle (Γ_k) , passant par A et B , et son centre ω_k décrit une ellipse (E'_k) de foyers O, Γ_k .

3. Considérons la chaîne de cercles $(\omega_1), (\omega_2), \dots, (\omega_n)$, de rayons $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$, tangents aux trois cercles $(O), (O_2), (\omega_1)$, et tangents entre eux de proche en proche. L'inversion i transforme ces cercles en les cercles égaux $(\omega'_1), (\omega'_2), \dots, (\omega'_n)$,

de rayons ρ'_1 , tangents aux droites parallèles By et Cx , respectivement en D_1, D_2, \dots, D_n et D'_1, D'_2, \dots, D'_n . Désignons par M et N les points de contact de (ω'_1) et (O_2) et le point de rencontre de la tangente à ces deux cercles en M avec By ; par ω''_1, ω'''_1 et ω' les projections orthogonales de ω_1, ω'_1 sur AB et le milieu de BC (fig. 2).

On obtient déjà

$$BC = 2R_2 \sin \theta' , \quad \rho'_1 = \frac{BC}{2} \sin \theta' = R_2 \sin^2 \theta' ,$$

puis

$$D_1 B = 2MN = 2\sqrt{R_2 \rho'_1} = 2R_2 \sin \theta' , \quad DC = R_2 \sin 2\theta' ,$$

ce qui donne, d'abord,

$$\text{tang } \widehat{D_1 B \omega'_1} = \frac{\rho'_1}{D_1 B} = \frac{1}{2} \sin \theta' ,$$

ensuite, de proche en proche,

$$\text{tang } \widehat{D_2 B \omega'_2} = \frac{\rho'_1}{2\rho'_1 + D_1 B} = \frac{\sin \theta'}{2(1 + \sin \theta')} , \dots ,$$

$$\text{tang } \widehat{D_n B \omega'_n} = \frac{\sin \theta'}{2[1 + (n-1) \sin \theta']} .$$

Si $\theta' = \frac{\pi}{2}$, on retrouve la figure du tranchet pour laquelle

$$\text{tang } \widehat{D_n B \omega'_n} = \frac{1}{2n} .$$

D'autre part,

$$\omega'_1 \omega' = \frac{1}{2} (D_1 B + D'_1 C) = R_2 \sin \theta' (2 + \cos \theta') ;$$

et, comme les cercles (ω_1) et (ω'_1) se correspondent, à la fois, dans l'inversion i et dans une homothétie de pôle A ,

$$\frac{\omega_1 \omega''_1}{2\rho_1} = \frac{\omega'_1 \omega'''_1}{2\rho'_1} = \frac{1}{2} (2 + \cos \theta') .$$

C'est la formule connue

$$\frac{\omega_1 \omega''_1}{2\rho_1} = 1$$

relative au tranchet, quand $\theta' = \frac{\pi}{2}$.

Les mêmes conclusions ont lieu pour la chaîne des cercles analogues tangents aux trois cercles (O), (O₁), (ω₁).

4. — CAS PARTICULIER: TRANCHET D'ARCHIMÈDE. Tout ce qui précède s'applique à cette figure dans laquelle la corde AB se confond avec un diamètre du cercle (O). Certaines des propriétés invoquées présentent cependant un intérêt particulier. Ainsi, en conservant la figure et les notations du paragraphe 3:

Les cercles (ω_R) sont orthogonaux au cercle décrit sur la distance du point A à son conjugué harmonique A', par rapport à C et B, comme diamètre et le cercle décrit sur un segment arbitraire AI dont l'extrémité I est centre A et A', comme diamètre, coupe les cercles (ω_R) sous le même angle.

Cette allusion au tranchet d'ARCHIMÈDE nous incite, pour terminer, à rappeler un triangle spécial dont nous avons signalé de très nombreuses propriétés¹.

Si l'on considère deux cercles arbitraires (O₁), (O₂) tangents intérieurement au cercle (O) aux extrémités A et B d'un diamètre de celui-ci et tels que OO₁ = a, OO₂ = b, en se rapportant à deux axes rectangulaires suivant les diamètres perpendiculaires AB, A₁B₁ du cercle (O), on obtient les coordonnées

$$x_H = \frac{(a - b)(2R - a - b)R}{(a + b)R - ab}, \quad y_H = R - \frac{(a^2 + b^2)R}{(a + b)R - ab}, \quad (3)$$

$$x_\omega = \frac{(a - b)R^2}{(a + b)R - ab}, \quad y_\omega = \frac{2R\sqrt{ab(R - a)(R - b)}}{(a + b)R - ab}, \quad (4)$$

d'une part, de l'orthocentre H du triangle PQV dont les sommets P, Q et V coïncident avec les milieux des demi-circonférences (O₁), (O₂), au-dessus de AB, et avec celui de la demi-circonférence (O), au-dessous de AB; d'autre part, du centre ω du cercle tangent aux cercles (O), (O₁), (O₂).

Dans le tranchet, où a + b = R, on obtient x_H = x_ω, et, d'après (3), (4), la droite ωH qui joint le centre du cercle inscrit au tranchet à l'orthocentre du triangle PQV est perpendiculaire au diamètre AB du cercle (O) et réciproquement.

(20 octobre 1950.)

¹ 1935, loc. cit.