

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1955)  
**Heft:** 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** AUSGEWÄHLTE EINZELPROBLEME DER KOMBINATORISCHEN  
GEOMETRIE IN DER EBENE  
**Autor:** Hadwiger, H. / Debrunner, H.  
**Kapitel:** I. Teil.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31350>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## I. TEIL.

Die Aussagen der ersten kleinen Gruppe beziehen sich auf Inzidenzverhältnisse bei Punkten, Geraden und Kreisen und gehören also der kombinatorischen Elementargeometrie an.

1. *Liegt auf der Verbindungsgeraden je zweier Punkte einer endlichen Punktmenge stets wenigstens ein dritter Punkt der Menge, so liegen alle Punkte auf einer Geraden.*

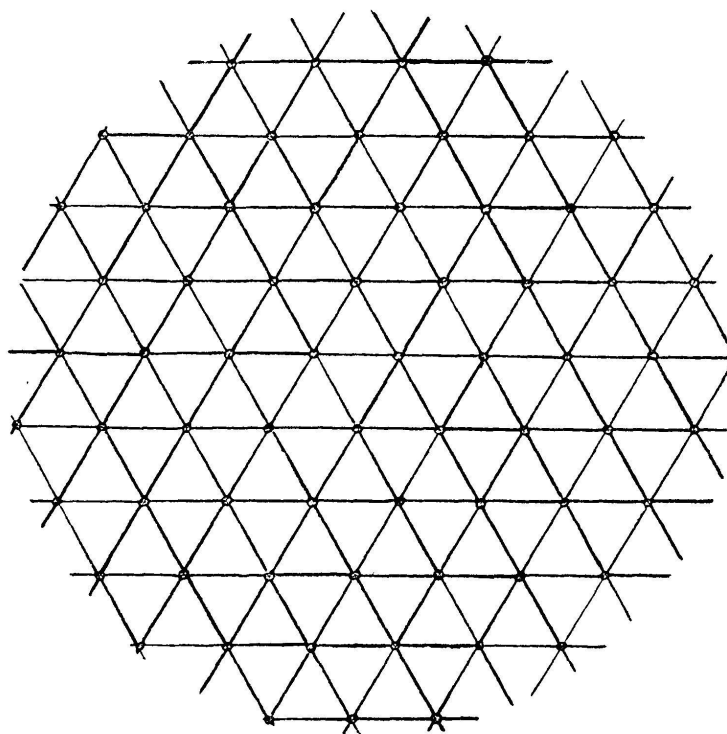


FIG. 1

Zu diesem 1893 von J. J. SYLVESTER [55] vermuteten Theorem findet sich ein kurzer Beweis von T. GALLAI (Grünwald) bei N. G. DE BRUIJN-P. ERDÖS [6], wo die Aussage auch als Korollar eines rein kombinatorischen Satzes erscheint. Für weitere Beweise, Verallgemeinerungen und Varianten vgl. P. ERDÖS [11], H. S. M. COXETER [7], G. A. DIRAC [9] und Th. MOTZKIN [39].

2. *Geht durch den Schnittpunkt je zweier Geraden einer endlichen Geradenmenge stets wenigstens eine dritte Gerade, so gehen alle Geraden durch einen Punkt.*

Die Aussagen **1** und **2** sind nicht mehr richtig, wenn die Punkt- und Geradenmengen nicht endlich sind. Dies zeigt bei-

spielsweise für beide Aussagen simultan das reguläre abzählbar-unendliche Punkt- und Geradensystem in Fig. 1.

3. *Liegt auf jeder Kreislinie durch je drei Punkte einer endlichen Punktmenge stets wenigstens ein vierter Punkt der Menge, so liegen alle Punkte auf einer Kreislinie.*

In Voraussetzung und Behauptung eng mit Aussage **3** verwandt ist der folgende Satz über beschränkte (d.h. in einem Kreis von endlichem Radius enthaltene) abgeschlossene Punkt-mengen:

4. *Hat eine beschränkte, abgeschlossene Punktmenge die Eigenschaft, dass die Symmetrieachse je zweier Punkte auch Symmetrieachse der ganzen Menge ist, so liegen ihre Punkte auf einer Kreislinie.*

Dass die Aussagen **3** und **4** für nicht endliche und nicht beschränkte Punkt-mengen unrichtig werden, ist dann trivial, wenn man kontinuierlich-unendliche Punkt-mengen in Betracht zieht. In der Tat genügt es, die ganze Ebene als Punkt-menge zu betrachten. Dagegen gibt es auch abzählbar-unendliche Punkt-mengen, für welche die Voraussetzungen von Aussage **3** und **4** erfüllt sind, ohne dass sie Teilmengen einer Kreislinie sind. In der Tat: Man wähle eine aus vier Punkten bestehende Menge  $A_0$ , die nicht auf einer Kreislinie oder einer Geraden liegt. Nun konstruiere man auf rekursive Weise eine aufsteigende Folge endlicher Punkt-mengen  $A_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), indem man  $A_n = \varphi(A_{n-1})$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) setzt, wobei  $\varphi(A)$  die Vereinigungsmenge aller Punkt-mengen bezeichnet, die durch Spiegelung von  $A$  an sämtlichen Symmetrieachsen von Punktpaaren aus  $A$  hervorgehen. Wie man sich leicht überlegt, ist die Vereinigungsmenge  $S = \cup A_n$  eine abzählbar-unendliche Punkt-menge mit der gewünschten Symmetrieeigenschaft; auf jeder durch drei Punkte von  $S$  gelegten Kreislinie liegt stets wenigstens ein vierter Punkt von  $S$ , falls die drei Punkte nicht ein reguläres Dreieck bilden, und bei geringfügiger Erweiterung der Konstruktion  $\varphi$  auch in diesem letztern Falle.

Wir lassen eine weitere Gruppe von Aussagen folgen, in welchen die Ganzzahligkeit oder auch die Rationalität von Distanzen eine Rolle spielt.

Die Menge der Punkte, deren Koordinaten bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems ganz sind, bilden das ebene *Einheitsgitter*; ihre Punkte heissen *Gitterpunkte*.

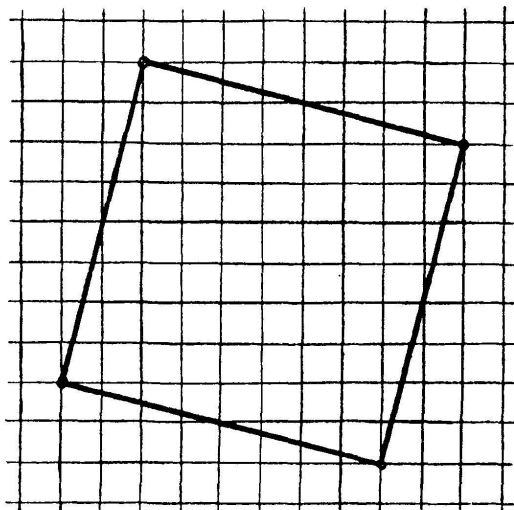


FIG. 2

5. *Bilden  $n$  Gitterpunkte ( $n > 2$ ) ein reguläres  $n$ -Eck, so ist  $n = 4$ , d.h. das Quadrat ist das einzige reguläre Viereck, das im Einheitsgitter eingelagert werden kann.*

Einen originellen Beweis hierfür gab W. SCHERRER [52], für den Fall  $n = 3$  vgl. auch G. PÓLYA-G. SZEGÖ [43], Bd. 2, S. 156, Aufgabe 238.

Ein Quadrat lässt sich selbstverständlich auch auf nicht-triviale Weise im Gitter einlagern; dies illustriert Fig. 2. Über die Eckenwinkel eingelagerter Rhomben gilt die Aussage:

6. *Bilden vier Gitterpunkte einen nichtquadratischen Rhombus mit dem Eckenwinkel  $\alpha$ , so ist  $\alpha/\pi$  irrational; d.h. das Quadrat ist der einzige im Einheitsgitter eingelagerte Rhombus, dessen Eckenwinkel mit dem vollen Winkel kommensurabel sind.*

Im engsten Zusammenhang hiermit steht eine Feststellung über die Winkel in pythagoreischen Dreiecken, d.h. in rechtwinkligen Dreiecken mit ganzzahligen Seitenlängen. Hier gilt:

7. Ist  $\alpha$  ein Basiswinkel eines pythagoreischen Dreiecks, so ist  $\alpha/\pi$  irrational.

Die Aussagen 6 und 7 sind geometrische Korollarien des folgenden goniometrischen Satzes (vgl. H. HADWIGER [18]):

8. Ist  $0 < \alpha < \pi/2$  und fällt  $\cos \alpha$  rational aus, so ist entweder  $\alpha = \pi/3$  oder  $\alpha/\pi$  ist irrational.

9. Hat eine unendliche Punktmenge die Eigenschaft, dass ihre Punktepaare ganzzahlige Distanzen aufweisen, so liegt sie ganz auf einer Geraden.

Dieser Satz von P. ERDÖS [12] (vgl. auch A. DELACHET [8], S. 50 und E. TROST [57]) darf als besonders typisch für eine gewisse Kategorie von Aussagen gelten, die uns dadurch besonders ansprechen, dass aus einfachsten Voraussetzungen eine starke und unerwartete Folgerung gezogen wird.

Besonders beachtenswert ist der Umstand, dass aus 9 nicht der Schluss gezogen werden darf, es gebe eine Höchstzahl  $k_0$  derart, dass die Behauptung immer schon dann gilt, wenn die Anzahl  $k$  der Punkte mit ausschliesslich ganzzahligen Punktdistanzen grösser ist als  $k_0$ . Es gibt nämlich zu jedem  $k$  derartige Punktmenge, die nicht linear sind, sogar solche der Eigenschaft, dass keine drei Punkte auf einer Geraden liegen. Solche Punktmenge wurden wiederholt konstruiert, u.a. von M. ALTWEGG [1], A. MÜLLER [40] und F. STEIGER [53].

Nach einer Idee von A. MÜLLER lässt sich eine auf der Einheitskreislinie dicht liegende, abzählbar-unendliche Punktmenge angeben, welche die Eigenschaft aufweist, dass jedes Punktepaar eine rationale Distanz besitzt. Es sei nämlich  $P_n$  der Punkt mit den Polarkoordinaten  $\rho = 1$ ,  $\varphi = 2n\theta$ , wo  $\theta$  durch  $\cos \theta = 4/5$  bestimmt ist, so dass nach Aussage 8  $\theta/\pi$  irrational wird. Die Punkte der Folge  $P_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ) sind paarweise verschieden und die erzeugte abzählbar-unendliche Punktmenge liegt auf der Einheitskreislinie. Sie liegt dort dicht und nach dem Gleichverteilungstheorem von H. WEYL sogar gleichverteilt, doch ist dies hier ohne Bedeutung. Für eine Distanz eines Punktepaares ergibt sich  $d(P_n, P_m) = 2 |\sin(n - m)\theta|$ , und wegen  $\sin \theta = 3/5$  und  $\cos \theta = 4/5$  ist dies nach goniometri-

schen Formeln eine rationale Zahl. Betrachtet man jetzt  $k$  Punkte dieser Menge, so lässt sich durch eine geeignete ähnliche Vergrößerung erzielen, dass alle auftretenden Distanzen ganzzahlig werden. Dabei liegen keine drei Punkte auf einer Geraden!

\* \* \*

Die folgende Aussagengruppe befasst sich mit der Hüllenbildung und Separation bei ebenen Punktmenge. Zunächst einige Erklärungen: Eine Punktmenge heisst bekanntlich *konvex*, wenn sie mit zwei Punkten stets auch die ganze Verbindungsstrecke enthält. Unter der *konvexen Hülle* einer Punktmenge versteht man die kleinste konvexe Punktmenge, welche jene als Teil enthält. Mit andern Worten ist die konvexe Hülle der Durchschnitt aller konvexen Punktmenge, welche die gegebene als Teil enthalten.

**10.** *Ein Punkt gehört dann und nur dann zur konvexen Hülle einer Punktmenge, wenn er bereits der konvexen Hülle von drei geeigneten Punkten der Menge angehört.*

Aus dieser Aussage folgt, dass die konvexe Hülle identisch ist mit der Vereinigungsmenge aller Dreiecksbereiche, deren Ecken der gegebenen Menge zugehören.

**11.** *Ein Punkt ist dann und nur dann innerer Punkt der konvexen Hülle einer Punktmenge, wenn er bereits innerer Punkt der konvexen Hülle von vier geeigneten Punkten der Menge ist.*

Die Aussagen **10** und **11** sind ebene Sonderfälle nützlicher, von E. STEINITZ [54] und W. GUSTIN [17] stammender Sätze. Vgl. auch O. HANNER-H. RÅDSTRÖM [20] und C. V. ROBINSON [49].

Zwei Punktmenge wollen wir *separierbar* nennen, wenn es eine Gerade gibt, welche keine der Mengen trifft und sie voneinander trennt; beide Punktmenge liegen dann im Innern der beiden Halbebenen, die durch die Gerade erzeugt werden. Über die Separierbarkeit gilt das folgende Kriterium von P. KIRCHBERGER [29] (vgl. auch H. RADEMACHER-I. J. SCHOENBERG [44]):

12. *Zwei Punktmengen sind dann und nur dann separierbar, wenn je zwei ihrer Teilmengen, deren Vereinigung höchstens vier Punkte enthält, separierbar sind.*
13. *Jede Punktmenge, die wenigstens vier Punkte enthält, lässt sich in zwei nichtleere, punktfremde und nichtseparierbare Teilmengen zerlegen.*

Hiezu vgl. F. W. LEVI [36] und R. RADO [46].

\* \* \*

Wir wenden uns jetzt einem Fragenkreis zu, in dessen Mittelpunkt das berühmte Helly'sche Theorem steht. Die zahlreichen Varianten, Sätze vom Helly'schen Typ, die sich in der Regel auf Eibereiche beziehen, bilden einen sehr typischen Teil der kombinatorischen Konvexgeometrie.

Unter einem *Eibereich* verstehen wir hier eine beschränkte, abgeschlossene und konvexe Punktmenge.

14. *Haben je drei Eibereiche einer (endlichen oder unendlichen) Menge von Eibereichen einen Punkt gemeinsam, so haben alle Eibereiche der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Dies ist der ebene Sonderfall des bekannten Helly'schen Satzes. Vgl. E. HELLY [21], J. RADON [48], D. KÖNIG [35], u.a.m. Wie man unmittelbar mit einfachsten Beispielen einsieht, kann die Anzahl drei nicht durch zwei ersetzt werden. Dies ist aber bei starken Voraussetzungen über die Gestalt der Eibereiche möglich. So gilt die folgende Variante:

15. *Haben je zwei Rechtecke einer Menge parallel orientierter Rechtecke einen Punkt gemeinsam, so haben alle Rechtecke der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Dagegen gilt: Ein Eibereich, der nicht ein Parallelogramm ist, lässt sich in drei Lagen verschieben, so dass je zwei der translationsgleichen Eibereiche einen Punkt gemeinsam haben, nicht aber alle drei. Für Parallelogramme ist dies nicht möglich. Die Gültigkeit einer Aussage der Art **15** mit leichter Modifikation

ist demnach für Parallelogramme charakteristisch. Vgl. hierzu auch B. SZ.-NAGY [41].

Ein Korollar von **15** ist der Hellysche Satz für die Gerade:

- 16.** *Haben in einer Geraden je zwei Strecken einer Streckenmenge einen Punkt gemeinsam, so haben alle Strecken der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Es ist naheliegend und für viele Anwendungen nützlich, Sätze vom Hellyschen Typ auch für die Kreislinie aufzustellen; an Stelle der Eibereiche treten hier abgeschlossene Kreisbogen, die selbstverständlich alle demselben Trägerkreis angehören sollen.

- 17.** *Hat eine Menge von Kreisbogen, die alle kleiner als Halbkreise sind, die Eigenschaft, dass je drei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so haben alle Bogen der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Die Bedingung über die Grösse der Bogen kann hier nicht gemildert werden, indem die Aussage bereits für Halbkreise falsch wird. In der Tat haben von den vier Halbkreisen, die durch zwei verschiedene Paare antipodischer Punkte der Kreislinie entstehen, je drei, aber nicht alle vier einen Punkt gemeinsam. Auch kann die Anzahl drei nicht durch zwei ersetzt werden. Von den drei Drittelskreisen, die die ganze Kreislinie überdecken, haben je zwei, aber nicht alle drei einen Punkt gemeinsam. Dagegen gilt:

- 18.** *Hat eine Menge von Kreisbogen, die alle kleiner als Drittelskreise sind, die Eigenschaft, dass je zwei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so haben alle Bogen der Menge einen Punkt gemeinsam.*

Lassen wir jede Voraussetzung über die Grösse der Bogen fallen, so gilt noch:

- 19.** *Hat eine Menge von Kreisbogen die Eigenschaft, dass je zwei Bogen einen Punkt gemeinsam haben, so gibt es ein antipodisches Punktepaar so, dass jeder Bogen der Menge wenigstens einen Punkt des Paares enthält.*



Es gibt mit andern Worten eine Durchmessergerade des Kreises, die alle Kreisbogen trifft. Sätze dieser Art wurden u.a. von C. V. ROBINSON [49] und A. HORN-F. A. VALENTINE [25] aufgestellt. Hübsche Anwendungen, wie wir solche auch weiter unten angeben werden, hat P. VINCENSINI [59] entdeckt.

- 20.** *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er im Durchschnitt von je drei Bereichen einer Eibereichsmenge enthalten ist, dann auch so, dass er im Durchschnitt aller Eibereiche der Menge liegt.*
- 21.** *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er je drei Bereiche einer Eibereichsmenge trifft, dann auch so, dass er alle Bereiche der Menge trifft.*
- 22.** *Lässt sich ein Eibereich stets so verschieben, dass er je drei Bereiche einer Eibereichsmenge enthält, dann auch so, dass er alle Bereiche der Menge enthält.*

Dies sind ebene Sonderfälle allgemeinerer, sich auf höhere Dimensionen beziehender Varianten des Helly'schen Satzes, die von P. VINCENSINI [58] und V. L. KLEE jr. [32] formuliert wurden. Wesentlich für die Gültigkeit dieser Aussagen ist die Bedingung, dass die Eibereiche in der Ebene nur verschoben und nicht etwa auch gedreht werden dürfen. Wird an Stelle der Translationsgruppe die Bewegungsgruppe gesetzt, so sind alle drei Aussagen falsch.

Wir belegen dies ausführlicher durch ein Beispiel zu Aussage **21**. Man betrachte die Menge der  $n$  Kreise ( $n > 2$ ) deren Mittelpunkte durch die Polarkoordinaten  $\rho = 1$  und  $\varphi = 2k\pi/n$  ( $k = 1, \dots, n$ ) gegeben sind, und deren Radius  $r = \cos^2(\pi/n)$  bzw.  $r = \cos^2(\pi/n) + \cos^2(\pi/2n) - 1$  ist, falls  $n$  gerade bzw. ungerade gewählt wurde. Wie man jetzt bestätigen kann, lässt sich eine Strecke (uneigentlicher Eibereich) der Länge 2 stets so legen, dass je  $n - 1$  Kreisscheiben der Kreismenge, nicht aber so, dass alle  $n$  Kreisscheiben getroffen werden. Die Strecke muss hiezu jedoch passend gedreht und verschoben werden. Fig. 3 illustriert dies im Falle  $n = 8$ .

- 23.** *Haben je zwei Eibereiche einer Eibereichmenge einen Punkt gemeinsam, so lässt sich durch jeden Punkt der Ebene eine Gerade legen, welche alle Eibereiche der Menge trifft.*
- 24.** *Haben je zwei Eibereiche einer Eibereichmenge einen Punkt gemeinsam, so lässt sich zu jeder Geraden der Ebene eine parallele Gerade legen, welche alle Eibereiche der Menge trifft.*

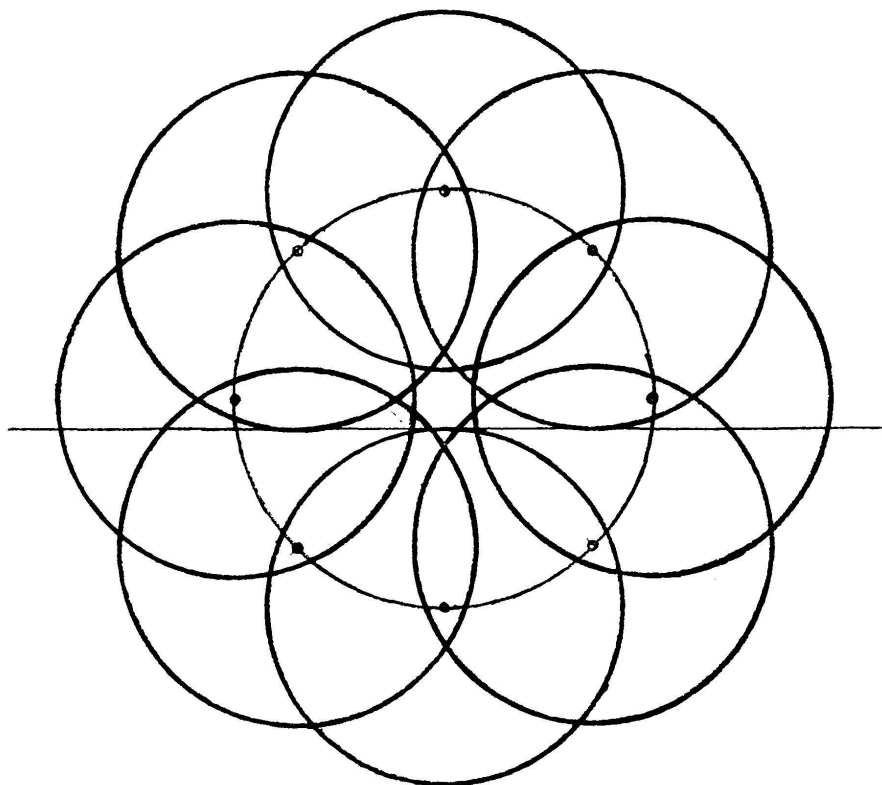


FIG. 3

Auch diese beiden Aussagen **23** und **24** sind ebene Sonderfälle allgemeinerer Sätze von A. HORN [24] und V. L. KLEE jr. [30]; sie beantworten die Frage, was sich an Stelle der Behauptung des Helly'schen Satzes noch aussagen lässt, wenn die Anzahl drei durch zwei ersetzt wird.

Man kann sich fragen, ob sich im Helly'schen Satz Punkt durch Gerade in dem Sinn ersetzen lässt, dass eine Aussage der folgenden Form richtig ist: Werden je  $h$  Bereiche einer Eibereichmenge von einer Geraden getroffen, so gibt es eine Gerade, welche alle Bereiche der Menge trifft. Existiert eine solche Helly'sche Stichzahl?

Die Antwort ist verneinend! Bereits L. A. SANTALÓ [50] hat bemerkt, dass zu jedem natürlichen  $n > 2$  eine Menge von  $n$

Eibereichen so konstruiert werden kann, dass je  $n - 1$  Bereiche der Menge eine gemeinsame Sekante, nicht aber alle  $n$  eine solche aufweisen. Dasselbe belegt auch unser Beispiel, das wir an Aussage **21** angeschlossen haben. Sätze der erwähnten Art, lassen sich nur aufstellen, wenn über Gestalt und Lage der Eibereiche zusätzliche Voraussetzungen getroffen werden. So hat L. A. SANTALÓ [50] bewiesen, dass alle Rechtecke einer Menge parallel orientierter Rechtecke von einer Geraden getroffen

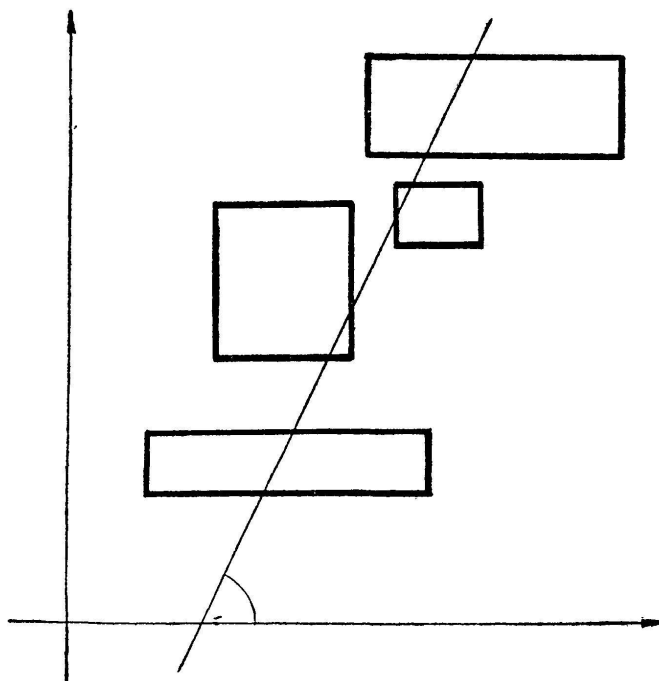


FIG. 4

werden, falls dies für je sechs Rechtecke der Menge zutrifft. Wir fügen hier die folgende Aussage an:

- 25.** *Werden je drei Rechtecke einer Menge parallel orientierter Rechtecke von einer ansteigenden Geraden getroffen, so gibt es eine ansteigende Gerade, welche alle Rechtecke der Menge trifft.*

Wir nehmen hierbei an, dass die Rechtecke parallel zu einem orthogonalen Koordinatensystem orientiert sind; eine Gerade ist ansteigend, wenn ihr Steigungsmass nichtnegativ ist. Vgl. hierzu Fig. 4.

Das oben dargelegte Beispiel (Fig. 3), das die Nichtexistenz einer Hellyschen Stichzahl  $h$  im allgemeinsten Fall beweist,

zeigt die auffallende Sachlage, dass sich die Eibereiche (Kreisscheiben) gegenseitig teilweise überdecken. Hier ist es naheliegend die Frage aufzuwerfen, ob sich eine Hellysche Stichzahl dann angeben lässt, wenn vorausgesetzt wird, dass die Eibereiche paarweise fremd sind, d.h. keine Punkte gemeinsam haben. Die Antwort auf diese auch von V. L. KLEE jr. [33] aufgeworfene Frage ist wieder verneinend.

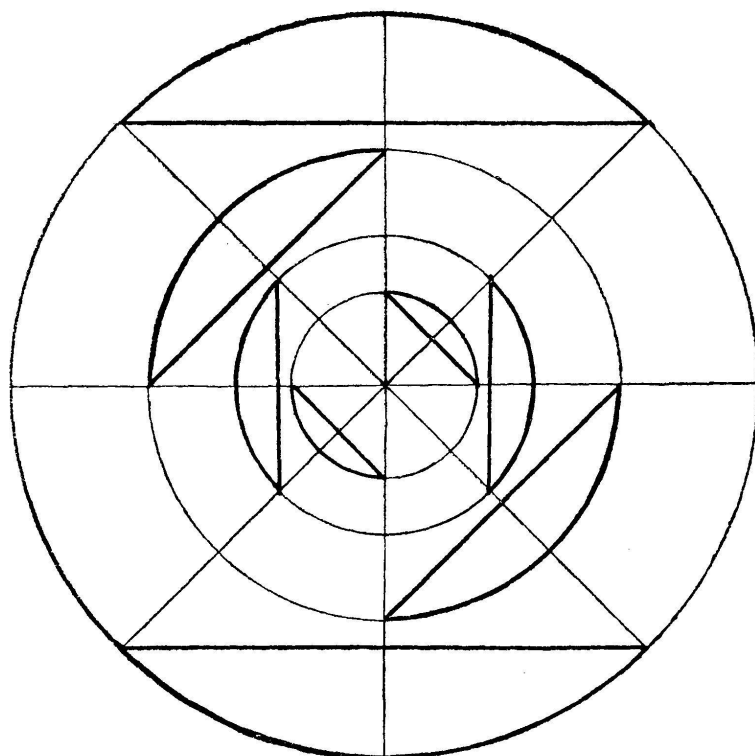


FIG. 5

Wir konstruieren ein Beispiel — eine Kreissegmentrosette — um diese Behauptung zu belegen. Es sei  $n > 1$ ;  $S_i$  und  $S_i^*$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) sollen insgesamt  $4n$  Kreissegmente der  $2n$  konzentrischen Kreise  $K_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) mit Zentrum  $Z$  und den Radien  $R_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) bezeichnen, wobei sich  $S_i$  und  $S_i^*$  bezüglich  $Z$  zentralsymmetrisch entsprechen sollen. Für die Radien sei zunächst nur  $0 < R_i \leq R_{i+1}$  festgelegt. Die Segmente der Kreise  $K_i$  sollen nachfolgend durch die Polarkoordinaten der Punkte ihrer Kreisbogen charakterisiert werden:

$$S_i: \rho = R_i; (i-n+1) (\pi/2n) \leq \varphi \leq (i+n-1) (\pi/2n)$$

$$S_i^*: \rho = R_i; (i+n+1) (\pi/2n) \leq \varphi \leq (i+3n-1) (\pi/2n).$$

Auch im Hinblick auf weitere Verwendungsmöglichkeiten wollen wir einige Eigenschaften unserer Kreissegmentrosette festlegen:

- A. Die Radien  $R_i$  können so gewählt werden, dass die  $4n$  Segmente paarweise fremd sind; sie müssen nur ausreichend stark anwachsen. Fig. 5 zeigt eine Rosette dieser Art für  $n = 2$ .
- B. Es gibt keine Gerade, welche alle  $4n$  Segmente trifft. Betrachten wir zunächst eine Gerade durch  $Z$ . Wegen der  $4n$ -zähligen Drehsymmetrie in der Koordinate  $\varphi$  genügt es anzunehmen, dass der Winkel der Geraden im Intervall  $0 \leq \varphi < \pi/2n$  liegt. Die Segmente  $S_n$  und  $S_n^*$  werden von einer solchen Durchmessergeraden nicht getroffen. Eine zu ihr parallele Gerade trifft aber entweder  $S_n$  oder  $S_n^*$  nicht.
- C. Es gibt keinen Punkt, der allen  $4n$  Segmenten angehört. Dies ist eine triviale Folgerung aus B.
- D. Im Falle  $R_i = R$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) haben je  $2n - 1$  Segmentpaare ein antipodisches Punktepaar gemeinsam. Es genügt, alle Paare ausser  $S_n$  und  $S_n^*$  zu betrachten. Die beiden Punkte  $\rho = R, \varphi = 0$  und  $\rho = R, \varphi = \pi$  gehören ihnen an.
- E. Im Falle  $R_i = R$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) gibt es kein antipodisches Punktepaar, das allen Segmentpaaren angehört. Dies ist eine triviale Folgerung von B.
- F. Je  $2n - 1$  Segmente werden von einer durch  $Z$  laufenden Geraden getroffen. Dies ist ein Korollar zu D; hier ist aber die Bedingung über die Gleichheit der Radien unerheblich, so dass die vorliegende Behauptung auch dann gilt, wenn die Segmente paarweise fremd sind.
- G. Im Falle  $R_i = R$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) gibt es zu jeder Auswahl von je  $2n - 1$  Segmenten zwei Punkte so, dass jedes Segment der Auswahl wenigstens einen der beiden Punkte enthält. Dies ist ein Korollar zu D.
- H. Es gibt nicht zwei Punkte so, dass jedes der  $4n$  Segmente wenigstens einen der beiden Punkte enthält. Dies ist ein Korollar zu B.

Mit den Eigenschaften A, B, und F ergibt sich nun in der Tat die Verneinung der oben erörterten Frage. Die gleiche Rosette ermöglicht es weiter, auch die Nichtexistenz weiterer Sätze vom Hellyschen Typ, welche gelegentlich erwogen worden sind, nachzuweisen.

So teilte im Anschluss an eine Arbeit von L. A. SANTALÓ [51], Th. MOTZKIN ein Gegenbeispiel zu folgendem Satz mit: Haben

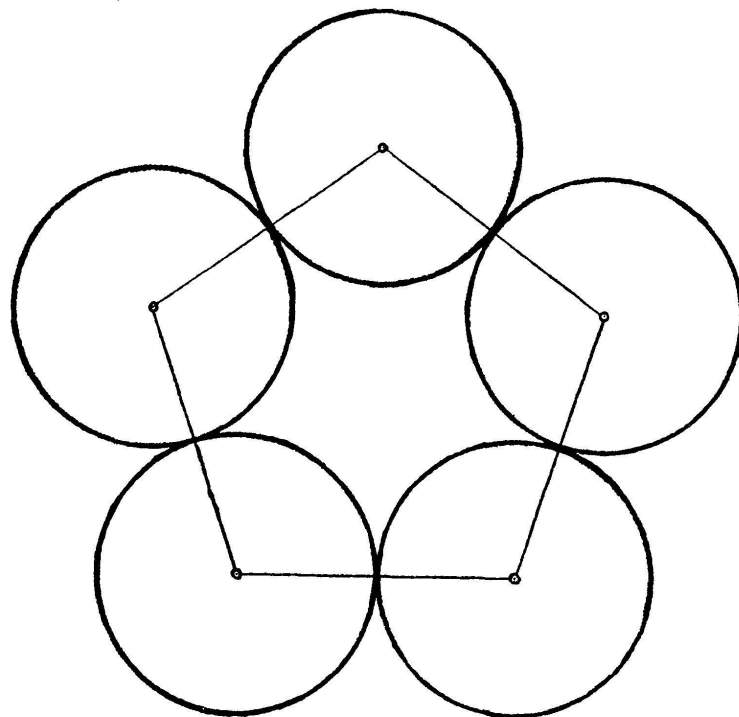


FIG. 6

je  $h$  Eibereichpaare einer Menge von Eibereichpaaren einen Punkt gemeinsam, so haben alle Eibereichpaare der Menge einen Punkt gemeinsam. Auch unsere Kreissegmentrosette widerlegt dies; im Falle gleicher Radien zeigen dies nämlich die Eigenschaften D und E.

V. L. KLEE jr. [31] hat einmal die Frage aufgeworfen, ob es eine Hellysche Stichzahl  $h$  so gibt, dass der folgende Satz richtig ist: Gibt es zu je  $h$  Eibereichen einer Eibereichmenge zwei Punkte so, dass jeder Bereich der Auswahl wenigstens einen der Punkte enthält, so trifft dasselbe für alle Bereiche der Menge zu. — Wieder existiert kein derartiger Satz; unsere Rosette beweist auch das, und zwar sind es im Falle gleicher Radien die Eigenschaften G und H, die den Nachweis liefern.

Nicht entschieden ist die Frage, ob es im Falle von Mengen paarweise fremder und kongruenter (oder translationsgleicher) Eibereiche eine Hellysche Stichzahl  $h$  so gibt, dass alle Eibereiche von einer Geraden getroffen werden, falls dies für je  $h$  Eibereiche zutrifft. Es ist naheliegend, die Frage zunächst für Mengen paarweise fremder kongruenter Kreise zu untersuchen. Obwohl die Existenz einer solchen Zahl  $h$  hier recht plausibel gemacht werden kann, konnte keine Abklärung der Frage erzielt

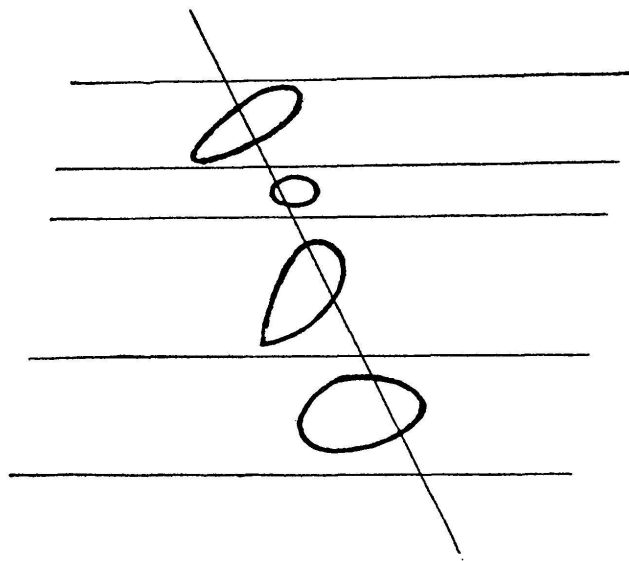


FIG. 7

werden. Jedenfalls müsste  $h \geq 5$  sein, wie die einfache in Fig. 6 dargestellte Menge von fünf regelmässig angeordneten Kreisen zeigt.

Dagegen gilt folgende Aussage über ähnliche, gleichliegende Eibereiche:

- 26.** *Werden je vier Bereiche einer Menge homothetischer Eibereiche von einer Geraden getroffen, so gibt es vier (paarweise parallele bzw. orthogonale) Geraden derart, dass jeder Eibereich der Menge von mindestens einer der Geraden getroffen wird.*

Die vorliegende Gruppe der Aussagen vom Hellyschen Typ wollen wir noch mit einer von P. VINCENSINI [59] entdeckten Variante abschliessen. Ein System von Eibereichen wollen wir *total separierbar* nennen, wenn es eine Richtung so gibt, dass jede Gerade dieser Richtung höchstens einen Eibereich des

Systems trifft. Es lässt sich dann in der Ebene ein System von paarweise fremden Parallelstreifen bilden, so dass jeder Streifen genau einen Eibereich des Systems enthält. Vgl. hierzu Fig. 7. Es gilt:

- 27.** *Werden je drei Eibereiche eines total separierbaren Eibereichsystems von einer geeigneten Geraden getroffen, so gibt es eine Gerade, die alle Bereiche des Systems trifft.*

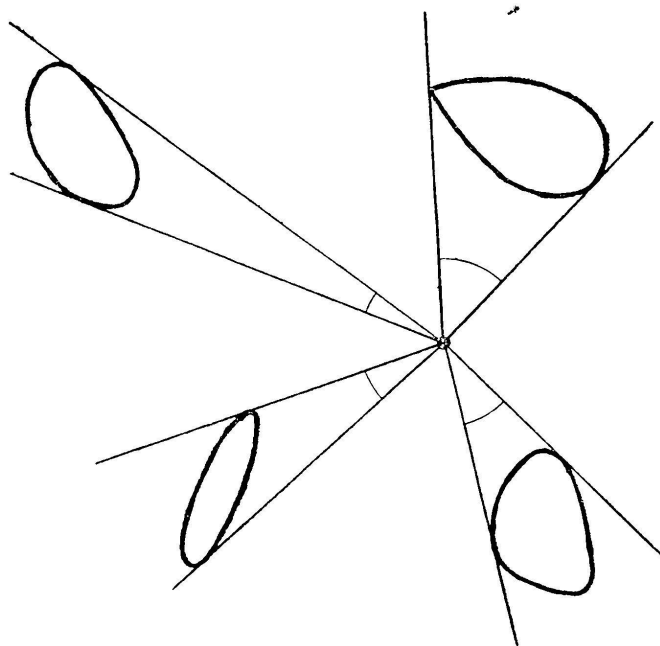


FIG. 8

Die von P. VINCENSINI angegebene Stichzahl war  $h = 4$ . Anschliessend hat V. L. KLEE jr. [34] bemerkt, dass sich der Satz verschärfen lässt, indem man die Stichzahl auf  $h = 3$  reduzieren kann.

Ein Korollar zu **27** ist der Satz von L. A. SANTALÓ [50] (vgl. auch H. RADEMACHER-I. J. SCHOENBERG [44]), wonach alle Strecken einer Menge paralleler Strecken eine gemeinsame Transversale aufweisen, falls dies bereits für je drei Strecken der Menge zutrifft.

Im Hinblick auf Aussage **27** interessiert die Frage, welche weiteren Eigenschaften eines Eibereichsystems es erlauben, auf seine totale Separierbarkeit zu schliessen. In diesem Zusammenhang erwähnen wir, dass dies zum Beispiel dann möglich ist, wenn die Eibereiche in der Ebene hinreichend dünn verstreut



sind; dies lässt sich durch die Grösse der Gesichtswinkel beschreiben. Vgl. hierzu Fig. 8. Es gilt:

28. Sind die Eibereiche eines Systems so dünn verstreut, dass von keinem Blickpunkt der Ebene aus mehr als ein Bereich des Systems unter einem Gesichtswinkel von  $\pi/3$  oder grösser erscheint, so ist das System total separierbar.

\* \* \*

Es folgt nun zum Schluss eine kleine Gruppe von Aussagen, die lose mit dem bekannten Satz von H. W. E. JUNG [26] über die Grösse des Hüllkreises einer Punktmenge von gegebenem Durchmesser zusammenhängen. Zunächst sollen einige Erklärungen vorausgeschickt werden.

Eine Punktmenge nennt man bekanntlich *beschränkt*, wenn sie durch einen Kreisbereich überdeckt werden kann. Im Zusammenhang mit den unten folgenden Feststellungen wollen wir eine Geradenmenge *beschränkt* nennen, wenn sie keine parallele Geraden enthält und wenn die Menge der Schnittpunkte, die durch ihre Geraden erzeugt werden, beschränkt ist.

Der *Deckradius* einer beschränkten Punktmenge ist der Radius des kleinsten (abgeschlossenen) Kreisbereichs, der alle Punkte der Menge enthält. Entsprechend definieren wir: Der *Treffradius* einer beschränkten Geradenmenge ist der Radius eines kleinsten (abgeschlossenen) Kreisbereichs, der alle Geraden der Menge trifft.

Der *Durchmesser* einer beschränkten Punktmenge ist die obere Grenze der Menge der Distanzen, die durch Punktepaare der Menge gebildet werden. Entsprechend definieren wir: Der *Durchmesser* einer beschränkten Geradenmenge ist der Durchmesser der Schnittpunktmenge.

29. Lassen sich je drei Punkte einer beschränkten Punktmenge durch einen Kreisbereich vom Radius  $R$  überdecken, so lässt sich die ganze Menge durch einen solchen Kreisbereich überdecken.
30. Lassen sich je drei Geraden einer beschränkten Geradenmenge durch einen Kreisbereich vom Radius  $r$  treffen, so gibt es

einen solchen Kreisbereich, der alle Geraden der Menge trifft.

Es handelt sich hier um Spezialfälle von Aussage **21**.

**31.** Für den Deckradius einer Punktmenge vom Durchmesser  $D = 1$  gilt  $R \leq 1/\sqrt{3}$ .

Dies ist der ebene Spezialfall des Jungschen Satzes. Vgl. dazu die ausführliche Darstellung bei H. RADEMACHER-O. TOEPLITZ [45].

**32.** Für den Treffradius  $r$  einer Geradenmenge vom Durchmesser  $D = 1$  gilt  $r \leq 1/2\sqrt{3}$ .

Diese Aussage bildet ein duales Gegenstück zum Jungschen Satz.

**33.** Eine Punktmenge vom Durchmesser  $D = 1$  lässt sich durch einen regulären Dreiecksbereich der Seitenlänge  $s = \sqrt{3}$  überdecken.

**34.** Eine Punktmenge vom Durchmesser  $D = 1$  lässt sich durch einen regulären Sechseckbereich der Seitenlänge  $s = 1/\sqrt{3}$  überdecken.

Einen universellen Bereich, der die Eigenschaft aufweist, dass jede Punktmenge vom Durchmesser  $D = 1$  damit zugedeckt werden kann, nennt man einen (normierten) *Deckel*. In diesem Sinn ist der Kreisbereich vom Radius  $R = 1/\sqrt{3}$  ein Deckel (Jungscher Deckel). Nach den Aussagen **33** und **34** ist der dem Kreis mit Durchmesser  $D = 1$  umschriebene reguläre  $n$ -Eckbereich ein Deckel, falls  $n = 3$  oder  $n = 6$  ist. Aussage **33** ist der ebene Sonderfall eines von D. GALE [15] für beliebige Dimensionen aufgestellten Gegenstücks zum Jungschen Satz. Aussage **34** stammt von J. PÁL [42].

**35.** Jede Punktmenge vom Durchmesser  $D = 1$  lässt sich durch drei Punkt Mengen überdecken, deren Durchmesser nicht grösser als  $\sqrt{3}/2$  ausfallen.

Dies ist eine von D. GALE [15] angegebene Verschärfung des von K. BORSUK [5] stammenden Satzes, wonach eine ebene

Punktmenge stets in drei Teile von kleinerem Durchmesser zerlegt werden kann. Eine von K. BORSUK aufgestellte Vermutung bezieht sich auf Punktfolgen des  $k$ -dimensionalen Raumes und sieht eine Zerlegung in  $k + 1$  Teilmengen mit kleineren Durchmessern vor; sie ist zur Zeit noch unbewiesen für  $k > 3$ ; für  $k = 3$  gab neuerdings H. G. EGGLESTON [10] einen Beweis.

Der oben erwähnte Satz von K. BORSUK (ohne die Verschärfung von D. GALE) ist — wenigstens für endliche Punktfolgen — auch eine Folgerung einer Aussage über die Anzahl der Punktepaare, welche den Durchmesser realisieren. Es gilt:

- 36.** *In einer endlichen Punktmenge vom Durchmesser  $D = 1$  gibt es höchstens  $n$  verschiedene Punktepaare der Distanz 1, wenn  $n$  die Anzahl der Punkte der Menge bezeichnet.*

Ein kurzer Beweis findet sich bei P. ERDÖS [13], ferner vgl. man eine Aufgabe von H. HOPF-E. PANNWITZ [23].

Die engen Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Satzgruppen soll schliesslich das folgende Korollar zu **34**, als Aussage vom Helly'schen Typ formuliert, vor Augen führen:

- 37.** *Haben je zwei Kreisscheiben einer Menge kongruenter Kreise vom Radius  $R = 1$  einen Punkt gemeinsam, so gibt es drei Punkte vom gegenseitigen Abstand  $d = 1$  derart, dass jede Kreisscheibe der Menge mindestens einen von ihnen enthält.*

Ähnliche, teils noch unbewiesene Aussagen finden sich bei L. FEJES TÓTH [14], S. 97.

## II. TEIL

Die vorstehend formulierten Aussagen sollen hier unter Benutzung der oben zitierten Quellen durch kurze Beweise belegt werden. Dabei erzwingen Raumgründe, dass oft nur der Gedankengang knapp angedeutet werden kann. Die Argumentation stützt sich vorwiegend auf elementare Sachverhalte, hie und da ergänzt durch einfache punktmengengeometrische Überlegungen.