

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1955)  
**Heft:** 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À  
V. ERMAKOF  
**Autor:** Ostrowski, A.  
**Kapitel:** IV. Discussion des séries (II, 4) et (II, 5).  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

**IV. Discussion des séries (II, 4) et (II, 5).**

Pour assurer la validité des conditions  $\gamma$ ) et  $\delta$ ) on doit faire des hypothèses plus restrictives sur la fonction  $\Psi''(x)$ . Il résulte en tout cas de la condition  $\alpha$ ),  $\varphi'_+$  étant continue par morceaux, que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} \varphi'_+(x) dx \tag{IV, 1}$$

est divergente et que l'intégrale

$$\int_{a_0}^{\infty} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} dx \tag{IV, 2}$$

converge. Or, le critérium de Maclaurin-Cauchy liant la divergence de la série (II, 4) à la divergence de l'intégrale (IV, 1) et la convergence de la série (II, 5) à l'intégrale (IV, 2) n'est pas valable sans restrictions. On suppose généralement que l'expression sous le signe d'intégral ne croît pas pour  $x$  tendant vers l'infini. Or, il résulte des relations (III, 5) et (III, 7) que  $\varphi'_+(x)$  ne croît pas si

$$1^\circ \psi'(a_1) = \frac{1}{\Psi''(a_0)} \leq 1$$

et

2° la fonction  $\psi'(x)$  ne croît pas, c'est-à-dire que  $\Psi''(x)$  ne décroît pas.

Il suffit donc d'imposer à la fonction  $\Psi'(x)$  les conditions suivantes pour que  $\varphi'_+(x)$  ne croisse dans aucun intervalle au-dessus de  $a_0$ :

$$\Psi''(a_0) \geq 1, \quad \Psi''(x) \leq \Psi''(y) \quad (a_0 \leq x \leq y). \tag{IV, 4}$$

On peut d'ailleurs remplacer (IV, 4) par la condition suivante, un peu moins restrictive:

*$\Psi''(x)$  ne décroît pas et atteint ou dépasse la valeur un pour une valeur  $b_0$  de  $x$ .*

En effet, on peut alors remplacer  $a_0$  par  $b_0$ , de sorte que les conditions (IV, 4) deviennent satisfaites.

On peut, d'autre part, établir les propriétés  $\gamma$ ) et  $\delta$ ) en imposant une condition tout à fait différente à  $\Psi''(x)$ , à savoir que  $\Psi''(x)$  ne croît pas.

En effet, dans ce cas on a évidemment  $\lim_{x \rightarrow \infty} \Psi''(x) = \alpha$  où  $\alpha$  ne peut être  $< 1$ , puisque dans le cas contraire la condition (II, 1) ne saurait être constamment satisfaite. Donc on a  $\alpha \geq 1$ ,  $\Psi''(x) \geq 1$ . On peut supposer  $\Psi''(a_0) > 1$ , puisque pour  $\Psi''(a_0) = 1$  on aurait  $\Psi''(x) \equiv 1$ , c'est-à-dire un des cas où les conditions (IV, 4) sont satisfaites. On a alors

$$\frac{d}{dx}(\Psi(x) - x) \geq \alpha - 1 \geq 0,$$

de sorte que  $\Psi(x) - x$  ne décroît pas. On a donc en particulier

$$a_\nu - a_{\nu-1} \geq a_1 - a_0.$$

Posons  $a_1 - a_0 = \Delta$ ,  $\Psi'(a_0) = \Psi'_0$ . On a alors

$$a_\nu - a_{\nu-1} \geq \Delta > 0 \quad (\nu \geq 1),$$

$$\varphi'_-(a_n) = \Psi'_0 \varphi'_+(a_n) \quad (\Psi'_0 > 1).$$

Soit  $\mu - 1$  le plus grand entier contenu dans  $\frac{1}{\Delta}$ . Alors pour tout entier  $\nu$ , chaque intervalle  $\langle \nu, \nu + 1 \rangle$  contient  $\mu$  points  $a_\lambda$  au plus, c'est-à-dire au plus  $\mu$  points de discontinuité de  $\varphi'_+(x)$ .

Or, dans notre hypothèse,  $\psi'(x)$  ne décroît pas, donc d'après (III, 5) dans un intervalle de continuité  $\varphi'_+(x)$  ne décroît pas et se trouve multipliée par  $\psi'(a_1) = \frac{1}{\Psi'_0} < 1$  à chaque passage par un point de discontinuité  $a_\nu$ . Il en résulte qu'on a pour chaque entier  $\nu \geq 1$

$$\varphi'_+(\nu) \geq \Psi_0^{-\mu} \varphi'_+(x) \quad (\nu \geq x \geq \nu - 1), \quad (\text{IV, 5})$$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi'_+(\nu) \leq \Psi_0^\mu \varphi'_+(x), \\ \varphi(\nu) \geq \varphi(x) - \mu - 1 \end{array} \right\} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1). \quad (\text{IV, 6})$$

La dernière inégalité résulte de ce que,  $\varphi'_+(x)$  étant toujours positive, la fonction  $\varphi(x)$  croît constamment et accroît d'une unité dans chaque intervalle  $\langle a_{\nu-1}, a_\nu \rangle$ .

Or, en vertu de (IV, 5), on obtient

$$\varphi'_+(\nu) \geq \Psi_0^{-\mu} \int_{\nu-1}^{\nu} \varphi'_+(x) dx,$$

et la divergence de la série (II, 4) résulte de celle de l'intégrale (IV, 1). D'autre part on a, en vertu de (IV, 6),

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq \frac{\Psi_0^{\mu} \varphi'_+(x)}{(\varphi(x) - \mu - 1)^2} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1),$$

dès que  $\varphi(x) \geq 2\mu + 2$ , donc

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq 4 \Psi_0^{\mu} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} \quad (\nu \leq x \leq \nu + 1, \quad \varphi(x) \geq 2\mu + 2),$$

$$\frac{\varphi'_+(\nu)}{\varphi(\nu)^2} \leq 4 \Psi_0^{\mu} \int_{\nu}^{\nu+1} \frac{\varphi'_+(x)}{\varphi(x)^2} dx \quad (\varphi(\nu) \geq 2\mu + 2),$$

et la convergence de la série (II, 5) résulte de celle de l'intégrale (IV, 2).

### V. Énoncé du résultat obtenu.

En rassemblant nos résultats nous avons le théorème suivant:

C. Soit  $\Psi(x)$  une fonction de  $x$  continue, possédant une dérivée positive et continue pour  $x \geq a_0$  et telle que l'on ait

$$\Psi(x) > x \quad (x \geq a_0).$$

Supposons que  $\Psi'(x)$  satisfait à l'une des deux conditions suivantes: ou bien  $\Psi'(x)$  ne décroît pas à partir d'un  $x$  et atteint ou dépasse la valeur un: ou bien  $\Psi'(x)$  ne croît pas à partir d'un  $x$ . Alors:

a) Si  $f(x)$  est positive à partir d'un  $x$  et est sommable tandis que  $\frac{1}{f(x)}$  reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de  $f(x)$  et si l'on a à partir d'un  $x$