

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1955)  
**Heft:** 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À  
V. ERMAKOF  
**Autor:** Ostrowski, A.  
**Kapitel:** VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \geq 1,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est divergente.

- b) Si  $f(x)$  est mesurable et positive à partir d'un  $x$  et reste uniformément borné dans chaque sous-intervalle fini de l'intervalle de définition de  $f(x)$  et s'il existe un nombre  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , tel qu'à partir d'un  $x$ ,

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \delta, \quad 0 < \delta < 1,$$

la série

$$\sum_{\nu}^{\infty} f(\nu)$$

est convergente.

## VI. Le critère B d'Ermakof et les critères de première espèce.

Quelle est la portée du critère B d'Ermakof comparée à celle des critères connus ? On trouve souvent l'assertion que le critère B d'Ermakof (avec  $\Psi(x) = e^x$ ) « embrasse » tous les critères de la série logarithmique de MORGAN-BERTRAND. Or ceci n'est vrai qu'en partie.

Si l'on considère *les critères de première espèce* dans lesquels  $a_{\nu}$  est comparé avec différentes fonctions de l'index  $\nu$ , le critère B d'Ermakof n'est pas même plus efficace que le critère de Cauchy portant sur  $\sqrt[\nu]{a_{\nu}}$ .

En effet, nous allons construire une fonction  $f(x)$  positive, continue, non croissante et tendant vers 0 avec  $x \rightarrow \infty$ , telle que l'on a

$$f(x) \leq e^{-x} \quad (x \geq 1), \quad (\text{VI, 1})$$

$$\frac{f(e^{x_{\nu}}) e^{x_{\nu}}}{f(x_{\nu})} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty) \quad (\text{VI, 2})$$

pour une suite  $x_{\nu}$  tendant vers l'infini. Alors la série  $\sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu)$  est

convergente et le critère de Cauchy sur  $\sqrt[n]{a_n}$  est applicable tandis que le critère du théorème B ne s'applique pas.

Posons à cet effet

$$x_1 = 1, \dots, x_{\nu+1} = e^{x_\nu} + 1 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Définissons  $f(x)$  dans l'intervalle  $\langle x_\nu, e^{x_\nu} \rangle$  par

$$f(x) = e^{-x_{\nu+1}} \quad (x_\nu \leq x \leq e^{x_\nu}).$$

Quant à l'intervalle de longueur  $un$  entre  $e^{x_\nu}$  et  $x_{\nu+1} = e^{x_\nu} + 1$ , la fonction  $f(x)$  y est définie comme fonction linéaire et *continue* dans tout l'intervalle fermé  $\langle e^{x_\nu}, x_{\nu+1} \rangle$ :

$$f(e^{x_\nu} + t) = t \cdot e^{-x_{\nu+1}} + (1 - t) e^{-x_\nu} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Alors  $f(x)$  sera positive, continue et non croissante. Pour tout  $x$  de l'intervalle  $\langle x_\nu, x_{\nu+1} \rangle$  elle est au plus égale à

$$f(x_\nu) = e^{-x_{\nu+1}} \leq e^{-x},$$

d'où (VI, 1).

D'autre part, on a d'après la définition de  $f(x)$  pour  $\nu \rightarrow \infty$

$$f(e^{x_\nu}) = f(x_\nu), \quad \frac{f(e^{x_\nu}) e^{x_\nu}}{f(x_\nu)} = e^{x_\nu} \rightarrow \infty,$$

c'est-à-dire (VI, 2).

Nous montrerons dans la section suivante qu'il n'en est plus de même pour les critères de seconde espèce portant sur le quotient  $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}$ .

Nous allons d'abord faire quelques observations sur les séries de MORGAN-BERTRAND. Nous désignerons par  $lg_k x$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) la  $k$ -ième itérée du  $lgx$ , c'est-à-dire

$$lg_0 x = x, \quad lg_1 x = lgx, \dots, \quad lg_{n+1} x = lg(lg_n x), \dots \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{VI, 1}$$

En plus, nous poserons

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = \frac{1}{x}, \dots, \quad L_{n+1}(x) = \frac{1}{x lgx \dots lg_n x}, \dots \quad (n = 1, 2, \dots). \tag{VI, 2}$$

Les séries de MORGAN-BERTRAND ont alors la forme

$$\sum_{\nu \geq \nu_0}^{\infty} \frac{L_n(\nu)}{lg_n^{1+s} \nu} \quad (\text{VI, 3})$$

et sont convergentes pour  $s > 0$  et divergentes pour  $s \leq 0$ .

On a évidemment

$$L_n(e^x) = e^{-x} L_n(x) lg_{n-1} x \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (\text{VI, 4})$$

donc, en posant  $\varphi(x) = \frac{L_n(x)}{lg_n^{1+s} x}$  :

$$\frac{\varphi(e^x) e^x}{\varphi(x)} = \frac{lg_n^{1+s} x}{lg_{n-1}^s x}. \quad (\text{VI, 5})$$

Or, pour  $x \rightarrow \infty$ , cette expression tend vers  $\infty$  pour  $s \leq 0$ , et vers 0 pour  $s > 0$ . On voit que le critère B d'Ermakof avec  $\Psi(x) = e^x$  permet de décider immédiatement la question de la convergence ou divergence des séries de MORGAN-BERTRAND.

Quel sera le résultat si l'on pose  $\Psi(x) = x^k$  ( $k > 1$ ) ? On a évidemment les relations

$$k x^{k-1} L_2(x^k) = L_2(x), \quad lg_2(x^k) = \left(1 + \frac{lg k}{lg_2 x}\right) lg_2 x,$$

donc

$$\frac{L_2(x^k) k x^{k-1}}{lg_2^{1+s}(x^k)} \bigg/ \frac{L_2(x)}{lg_2^{1+s} x} = \left(1 + \frac{lg k}{lg_2 x}\right)^{-1-s}. \quad (\text{VI, 6})$$

(VI, 6) tend vers  $un$  pour  $x \rightarrow \infty$ , de sorte que le critère B de convergence pour  $s > 0$  est en défaut pour les séries de MORGAN-BERTRAND correspondant à  $n = 2$ . (VI, 6) est  $< 1$  pour  $s > -1$  et n'est  $\geq 1$  que pour  $s \leq -1$ . Le critère B d'Ermakof ne permet donc de prouver la divergence des séries de MORGAN-BERTRAND correspondant à  $n = 2$  que pour  $s \leq -1$ . D'autre part, il résulte immédiatement des relations

$$\frac{k x^{k-1} x^{1+s}}{x^{k(1+s)}} = k x^{-s(k-1)}, \quad \frac{k x^{k-1} x (lg x)^{1+s}}{x^k (k lg x)^{1+s}} = k^{-s}$$

que pour  $n = 0$  et  $n = 1$  la question de la convergence (ou divergence) des séries de MORGAN-BERTRAND est complètement résolue par le critère B d'Ermakof avec  $\Psi(x) = x^k$  ( $k > 1$ ).

**VII. Le critère B d'Ermakof et les critères de seconde espèce.**

Les critères de seconde espèce reposent sur le fait que si l'on a

$$\frac{a_{\nu+1}}{a_{\nu}} \leq \frac{c_{\nu+1}}{c_{\nu}} \quad (a_{\nu}, c_{\nu} > 0 ; \nu = 1, 2, \dots),$$

la convergence de  $\Sigma c_{\nu}$  entraîne celle de  $\Sigma a_{\nu}$ , donc la divergence de  $\Sigma a_{\nu}$  entraîne la divergence de  $\Sigma c_{\nu}$ . On obtient les différentes formes de ce critère par un choix convenable des « séries de comparaison »: la série convergente  $\Sigma c_{\nu}$ , ou la série divergente  $\Sigma a_{\nu}$ .

Or si les  $a_{\nu}$  et les  $c_{\nu}$  convergent vers 0 en décroissant, le principe suivant est « en général » valable:

*Si la convergence de la série de comparaison  $\Sigma c_{\nu}$  s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée  $\Psi(x)$ , le même critère d'Ermakof assure directement la convergence de  $\Sigma a_{\nu}$ . Si la divergence de la série  $\Sigma a_{\nu}$  s'obtient au moyen d'un critère B d'Ermakof, ce même critère assure aussi la divergence de  $\Sigma c_{\nu}$ .*

Toutefois, pour les énoncés précis, il faut utiliser des hypothèses supplémentaires. Nous dirons d'une fonction  $f(x)$  non nulle à partir d'un  $x$ , qu'elle possède la propriété E si l'on a

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x + \theta)}{f(x)} = 1 \tag{VII, 1}$$

uniformément par rapport à  $\theta$  pour  $|\theta| \leq 1$ .

Avec cette notion, nous allons démontrer le lemme suivant:

**Lemme.** — *Soient  $f(x)$  et  $g(x)$  deux fonctions positives pour  $x \geq x_0$ , dont l'une au moins jouit de la propriété E, tandis que l'autre est ou bien non croissante, ou bien jouit de la propriété E. Soient  $\Psi(x)$ ,  $\Phi(x)$  deux fonctions positives pour  $x \geq x_0$  avec  $\Psi(x) \geq x + 1$ . Alors si l'on a pour tout entier  $\nu \geq n_0$ :*