

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 1 (1955)
Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF
Autor: Ostrowski, A.
Kapitel: VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Si enfin $f(x)$ jouit de la propriété E et $g(x)$ est non croissante, l'expression (VII, 6) est équivalente à

$$\frac{f(N+1)g(x)}{f(n)g(\Psi(x))} \leq \frac{f(N+1)g(n)}{f(n)g(N+1)} \leq 1.$$

Notre lemme est démontré.

Soit maintenant $\Psi(x)$ une fonction conjuguée satisfaisant à la condition $\Psi(x) \geq x + 1$. En remplaçant dans le lemme qui vient d'être démontré $\Phi(x)$ par $\Psi'(x)$ on voit que si la convergence de la série $\Sigma g(\nu)$ se démontre au moyen du critère B d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$ il en est de même pour la série $\Sigma f(\nu)$. De même, si la divergence de la série $\Sigma f(\nu)$ se démontre au moyen du critère (I,7) d'Ermakof correspondant à $\Psi(x)$, il en est de même pour $\Sigma g(\nu)$.

Posons en particulier $\Psi(x) = e^x$. Alors les fonctions

$$L_n(x) \lg_n^{1+s} x \quad (n = 0, 1, \dots)$$

jouissent de la propriété E. D'autre part, nous avons vu que le critère B d'Ermakoff (avec $\Psi(x) = e^x$) s'applique directement à toutes ces séries. Ainsi, en interpolant les a_ν entre deux entiers successifs par des fonctions linéaires, il en résulte :

Les critères de seconde espèce utilisant comme série de comparaison une des séries de Morgan-Bertrand sont contenus dans le critère B d'Ermakof pour $\Psi(x) = e^x$ s'il s'agit d'une série Σa_ν à termes non croissants ou bien si l'on a $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} \rightarrow 1$.

VIII. La sensibilité des critères B d'Ermakof pour les itérées d'une fonction conjuguée.

Nous allons maintenant dire quelques mots sur la sensibilité relative des critères B d'Ermakof correspondant aux différents choix de la fonction conjuguée $\Psi(x)$. A ce sujet, on trouve dans la première note d'Ermakof deux assertions dont les démonstrations vaguement esquissées ne paraissent pas très satisfaisantes. Nous allons montrer que ces énoncés sont inexacts.¹

¹ E. I, pp. 253-254. L'erreur d'Ermakof consiste en ce qu'il suppose que le quotient $\frac{f(\Psi(x))\Psi'(x)}{f(x)}$ tend toujours vers une limite qui pourrait être aussi ∞ .

Désignons les itérées de la fonction conjuguée $\Psi(x)$ par $\Psi_n(x)$, de sorte qu'on ait

$$\Psi_1(x) = \Psi(x), \quad \dots, \quad \Psi_{n+1}(x) = \Psi(\Psi_n(x)) \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Alors la *première assertion* d'Ermakof peut être énoncée comme suit:

Les fonctions conjuguées $\Psi_n(x)$ et $\Psi(x)$ donnent une sensibilité identique pour les caractères de convergence et de divergence.

Ce théorème est inexact. Au contraire, les fonctions itérées $\Psi_n(x)$ ($n > 1$) donnent une sensibilité en général plus grande que $\Psi(x)$. En effet, on a évidemment

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \Psi'_n(x) = \frac{f(\Psi(\Psi_{n-1}(x)))}{f(\Psi_{n-1}(x))} \Psi'(\Psi_{n-1}(x)) \cdot \frac{f(\Psi_{n-1}(x))}{f(x)} \Psi'_{n-1}(x). \quad (\text{VIII, 1})$$

Il en résulte que si l'on a

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \Psi'(x) = q < 1$$

on aura

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \leq q \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi_{n-1}(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_{n-1}(x),$$

donc par récurrence

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \leq q^n.$$

De même, si l'on a à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi(x))}{f(x)} \Psi'(x) \geq 1,$$

il résulte de (VIII, 1) qu'on aura aussi à partir d'un x

$$\frac{f(\Psi_n(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_n(x) \geq 1.$$

Nous allons maintenant donner un exemple d'une fonction $f(x)$ non croissante à partir d'un x et telle que le critère de convergence B d'Ermakof n'est pas applicable à la série $\Sigma f(v)$ pour $\Psi(x) = x^2$, mais devient applicable pour $\Psi_2(x) = x^4$.

A cet effet, formons une suite infinie x_1, x_2, x_3, \dots en posant

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 4^4, \quad \dots, \quad x_{\nu+1} = (1 + x_\nu)^4 \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Posons $f(x_1) = 1$ et

$$f(x) = \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2} \lg x_\nu) x} \quad (x_\nu < x < x_\nu^4),$$

$$f(x) = \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) x} \quad (x_\nu^4 \leq x \leq x_{\nu+1} = (1 + x_\nu)^4).$$

Ces relations permettent évidemment de définir la valeur de $f(x)$ par voie de récurrence pour $x \geq 3$. Il résulte de ces formules que la fonction $f(x)$ ainsi définie est continue, positive et non croissante dans chacun des intervalles $(x_\nu, x_\nu^4), < x_\nu^4, (1 + x_\nu)^4 >$, tandis qu'en passant par le point $x = x_\nu^4$ sa valeur se trouve divisée par 8^ν et en passant par le point x_ν , par $8^{\nu^2} x_\nu \lg x_\nu$.

Considérons le rapport $\frac{f(x^2) 2x}{f(x)}$ pour $x_\nu < x < 1 + x_\nu$; x^2 étant contenu dans l'intervalle (x_ν, x_ν^4) , il résulte évidemment

$$\frac{f(x^2) 2x}{f(x)} = \frac{x \cdot 2x}{x^2} = 2.$$

On a donc, en posant $\Psi(x) \equiv x^2$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \geq 2.$$

Pour $\Psi_2(x) = x^4$, on obtient

$$\frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = \frac{f(x^4) 4x^3}{f(x)}.$$

Or, en premier lieu, si $x_\nu \leq x \leq 1 + x_\nu$, x^4 est située dans l'intervalle $< x_\nu^4, x_{\nu+1} >$. On aura donc

$$f(x^4) = \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4) 4x^3}{f(x)} \leq \frac{x \cdot 4x^3}{8^\nu x^4} = \frac{4}{8^\nu} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty, \quad x_\nu \leq x \leq 1 + x_\nu).$$

En second lieu, si $1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}$, x^4 sera situé dans l'intervalle $(x_{\nu+1}, x_{\nu+1}^4)$ de sorte qu'on aura

$$f(x^4) = \frac{f(x_{\nu+1})}{(8^{(\nu+1)^2} \lg x_{\nu+1}) x^4},$$

donc

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} = \frac{4 f(x_{\nu+1})}{(8^{\nu^2+2\nu+1} \lg x_{\nu+1}) x f(x)},$$

et, puisqu'on a en tout cas

$$f(x) \geq \frac{f(x_\nu)}{(8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) x},$$

il vient

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} \leq \frac{f(x_{\nu+1}) (8^{\nu^2+\nu} \lg x_\nu) \cdot 4}{(8^{\nu^2+2\nu+1} \lg x_{\nu+1}) f(x_\nu)} = \frac{f(x_{\nu+1}) \lg x_\nu}{(2 \cdot 8^\nu \lg x_{\nu+1}) f(x_\nu)}.$$

Or, on a évidemment pour $\nu \rightarrow \infty$

$$\lg x_{\nu+1} \sim 4 \lg x_\nu, \quad f(x_{\nu+1}) < f(x_\nu),$$

donc

$$\frac{f(x^4) 4 x^3}{f(x)} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty, \quad 1 + x_\nu < x < x_{\nu+1}).$$

On a ainsi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\Psi_2(x))}{f(x)} \frac{d}{dx} \Psi_2(x) = 0,$$

et le critère B d'Ermakof avec la fonction conjuguée $\Psi_2(x) = x^4$ est applicable à la série $\Sigma f(\nu)$.

IX. Les fonctions conjuguées auxquelles $x + 1$ est subordonné.

En second lieu Ermakof donne à l'endroit cité l'énoncé suivant:

« De deux fonctions conjuguées de première espèce la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence. »