Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 1 (1955)

Heft: 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À V. ERMAKOF

Autor: Ostrowski, A.

Kapitel: X. Les fonctions conjuguées auxquelles x^k est subordonné.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31365

Alors on a pour tout entier positif n:

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n} .$$

Or, soit $n = [\Psi(x) - x]$. On obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq \frac{f(x+n)\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{\varepsilon}\, e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) .$$

D'autre part, on a à partir d'un x

$$lg\, \Psi'(x) \leqq \frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x) - x] , \qquad \Psi'(x) \leqq e^{\frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x)-x]} ,$$

donc

$$e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) \leqq e^{-\frac{\varepsilon}{2}[\Psi(x)-x]} \longrightarrow 0 , \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

X. Les fonctions conjuguées auxquelles $\mathrm{x^k}$ est subordonné.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que $x^k\,(k > 1)$ soit subordonné à la fonction conjuguée $\Psi(x)$ pour chaque k:

Si la fonction conjuguée $\Psi(x)$ satisfait aux deux conditions

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)\,(lg\, \Psi(x))^{1+\delta}} \longrightarrow 0 , \quad \frac{lg\, x}{lg\, lg\, \Psi(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty) \tag{X, 1}$$

pour chaque $\delta > 0$, la fonction conjuguée $\mathrm{x^k}$ est subordonnée à $\Psi(x)$ pour chaque $\mathrm{k} > 1$.

Démonstration. — On a à partir d'un x

$$\frac{f(x^k)\, k\, x^{k-1}}{f(x)} \leqq q = e^{-\varepsilon} < 1 ;$$

il en résulte pour chaque entier positif n

$$\frac{f\left(x^{k^n}\right) k^n\, x^{k^n}}{x\, f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n} . \tag{X, 2}$$

Or, choisissons l'entier n en fonction de x de façon que l'on ait

$$x^{k^{n+1}} > \Psi(x) \geqq x^{k^n} . \tag{X, 3}$$

On a alors, $\Psi(x)$ étant continue, pour un certain $\bar{x}$

$$\Psi(x) = \bar{x}^{k^n},$$

où évidemment

$$x \leqq \bar{x} < x^k . \tag{X, 4}$$

En appliquant (X, 2) à $\bar{x}$, on aura donc

$$\frac{f(\Psi(x))\, k^n\, \Psi(x)}{\bar{x}\, f(\bar{x})} \leqq e^{-\varepsilon n},$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n} \frac{f(\bar{x})}{f(x)}\, \bar{x}\, \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} \frac{1}{k^n} . \tag{X, 5}$$

Or, $\bar{x}$ étant $\geqq x$ d'après (X, 4) on aura $f(\bar{x})/f(x) \leqq 1$. D'autre part, il résulte de (X, 3)

$$k^{n+1} > \frac{lg\, \Psi(x)}{lg\, x}, \tag{X, 6}$$

donc

$$\frac{1}{k^n} < k \frac{lg\, x}{lg\, \Psi(x)} .$$

On obtient donc en introduisant cette borne dans l'expression de droite de (X, 5) et en remplaçant $\bar{x}$ par sa borne supérieure x^k:

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n}\, k\, x^k \frac{lg\, x}{lg\, \Psi(x)} \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} . \tag{X, 7}$$

On a à partir d'un x par hypothèse

$$\Psi'(x) \leqq \Psi(x)\, (lg\, \Psi(x))^{1+\delta},$$

avec

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2\, lg\, k}, \tag{X, 8}$$

donc, en vertu de (X, 7)

$$\frac{f(\Psi(x))\, \Psi'(x)}{f(x)} \leqq e^{-\varepsilon n}\, k\, x^k\, lg\, x\, (lg\, \Psi(x))^{\delta} . \tag{X, 9}$$

D'autre part, on a d'après (X, 6)

$$n > \frac{lg\dfrac{lg\,\Psi(x)}{lg\,x}}{lg\,k} - 1\,,$$

donc

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon}\left(\frac{lg\,\Psi(x)}{lg\,x}\right)^{-\frac{\varepsilon}{lg\,k}},$$

par suite, d'après (X, 8),

$$e^{-\varepsilon n} \leqq e^{\varepsilon}\left(\frac{lg\,x}{lg\,\Psi(x)}\right)^{2\delta}.$$

En introduisant cette borne dans (X, 9) on obtient

$$\frac{f(\Psi(x))\,\Psi'(x)}{f(x)} \leqq k\,e^{\varepsilon}\,x^{k}\,\frac{(lg\,x)^{1+2\delta}}{(lg\,\Psi(x))^{\delta}}. \tag{X, 10}$$

Or on a, en vertu de (X, 1) à partir d'un x:

$$\delta\,lg\,lg\,\Psi(x) > (k+1)\,lgx\,, \quad (lg\,\Psi(x))^{\delta} > x^{k+1}\,.$$

L'expression de droite de (X, 10) est donc à partir d'un x

$$\leqq k\,e^{\varepsilon}\,\frac{(lg\,x)^{1+2\delta}}{x}$$

et tend vers 0 avec $x \longrightarrow \infty$. x^k est donc bien subordonné à $\Psi(x)$.

Nos conditions (X, 1) sont par exemple satisfaites pour

$$\Psi(x) = e^{e^{x}}, \quad \Psi(x) = e^{e^{e^{x}}}, \quad \Psi(x) = e^{e^{(lg\,x)^2}}.$$

XI. Quelques observations sur le théorème A.

Nous établirons enfin quelques propositions supplémentaires relatives au critère A d'Ermakof.

α) *Soient* $\Psi(x)$ *et* $\psi(x)$ *deux fonctions positives, continues et dérivables pour* $0 < x_0 \leqq x < \infty$ *et telles que l'on ait*

$$\Psi(x) \longrightarrow \infty\,, \quad \psi(x) \longrightarrow \infty \quad (x \longrightarrow \infty)$$