

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 1 (1955)  
**Heft:** 1-2-3: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR LES CRITÈRES DE CONVERGENCE ET DIVERGENCE DUS À  
V. ERMAKOF  
**Autor:** Ostrowski, A.  
**Kapitel:** X. Les fonctions conjuguées auxquelles  $x^k$  est subordonné.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31365>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 02.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Alors on a pour tout entier positif  $n$ :

$$\frac{f(x+n)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n}.$$

Or, soit  $n = [\Psi(x) - x]$ . On obtient

$$\frac{f(\Psi(x)) \Psi'(x)}{f(x)} \leq \frac{f(x+n) \Psi'(x)}{f(x)} \leq e^\varepsilon e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x).$$

D'autre part, on a à partir d'un  $x$

$$\lg \Psi'(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x) - x], \quad \Psi'(x) \leq e^{\frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x)-x]},$$

donc

$$e^{-\varepsilon[\Psi(x)-x]} \cdot \Psi'(x) \leq e^{-\frac{\varepsilon}{2} [\Psi(x)-x]} \longrightarrow 0, \quad \text{C.Q.F.D.}$$

### X. Les fonctions conjuguées auxquelles $x^k$ est subordonné.

Nous allons maintenant établir une condition suffisante pour que  $x^k$  ( $k > 1$ ) soit subordonné à la fonction conjuguée  $\Psi(x)$  pour chaque  $k$ :

*Si la fonction conjuguée  $\Psi(x)$  satisfait aux deux conditions*

$$\frac{\Psi'(x)}{\Psi(x) (\lg \Psi(x))^{1+\delta}} \longrightarrow 0, \quad \frac{\lg x}{\lg \lg \Psi(x)} \longrightarrow 0 \quad (x \longrightarrow \infty) \quad (\text{X}, 1)$$

*pour chaque  $\delta > 0$ , la fonction conjuguée  $x^k$  est subordonnée à  $\Psi(x)$  pour chaque  $k > 1$ .*

*Démonstration.* — On a à partir d'un  $x$

$$\frac{f(x^k) k x^{k-1}}{f(x)} \leq q = e^{-\varepsilon} < 1;$$

il en résulte pour chaque entier positif  $n$

$$\frac{f(x^{kn}) k^n x^{kn}}{x f(x)} \leq e^{-\varepsilon n}. \quad (\text{X}, 2)$$

Or, choisissons l'entier  $n$  en fonction de  $x$  de façon que l'on ait

$$x^{kn+1} > \Psi(x) \geq x^{kn}. \quad (\text{X}, 3)$$

On a alors,  $\Psi'(x)$  étant continue, pour un certain  $\bar{x}$

$$\Psi'(x) = \bar{x}^{k^n},$$

où évidemment

$$x \leq \bar{x} < x^k. \tag{X, 4}$$

En appliquant (X, 2) à  $\bar{x}$ , on aura donc

$$\frac{f(\Psi'(x)) k^n \Psi'(x)}{\bar{x} f(\bar{x})} \leq e^{-\varepsilon n},$$

ce que nous pouvons encore écrire

$$\frac{f(\Psi'(x)) \Psi''(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} \frac{f(\bar{x})}{f(x)} \frac{\Psi''(x)}{\Psi'(x)} \frac{1}{k^n}. \tag{X, 5}$$

Or,  $\bar{x}$  étant  $\geq x$  d'après (X, 4) on aura  $f(\bar{x})/f(x) \leq 1$ . D'autre part, il résulte de (X, 3)

$$k^{n+1} > \frac{\lg \Psi'(x)}{\lg x}, \tag{X, 6}$$

donc

$$\frac{1}{k^n} < k \frac{\lg x}{\lg \Psi'(x)}.$$

On obtient donc en introduisant cette borne dans l'expression de droite de (X, 5) et en remplaçant  $\bar{x}$  par sa borne supérieure  $x^k$ :

$$\frac{f(\Psi'(x)) \Psi''(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} k x^k \frac{\lg x}{\lg \Psi'(x)} \frac{\Psi''(x)}{\Psi'(x)}. \tag{X, 7}$$

On a à partir d'un  $x$  par hypothèse

$$\Psi''(x) \leq \Psi'(x) (\lg \Psi'(x))^{1+\delta},$$

avec

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2 \lg k}, \tag{X, 8}$$

donc, en vertu de (X, 7)

$$\frac{f(\Psi'(x)) \Psi''(x)}{f(x)} \leq e^{-\varepsilon n} k x^k \lg x (\lg \Psi'(x))^\delta. \tag{X, 9}$$

D'autre part, on a d'après (X, 6)

$$n > \frac{\lg \frac{\lg \Psi'(x)}{\lg x}}{\lg k} - 1,$$

donc

$$e^{-\varepsilon n} \leq e^{\varepsilon} \left( \frac{\lg \Psi'(x)}{\lg x} \right)^{-\frac{\varepsilon}{\lg k}},$$

par suite, d'après (X, 8),

$$e^{-\varepsilon n} \leq e^{\varepsilon} \left( \frac{\lg x}{\lg \Psi'(x)} \right)^{2\delta}.$$

En introduisant cette borne dans (X, 9) on obtient

$$\frac{f(\Psi'(x)) \Psi''(x)}{f(x)} \leq k e^{\varepsilon} x^k \frac{(\lg x)^{1+2\delta}}{(\lg \Psi'(x))^{\delta}}. \quad (\text{X, 10})$$

Or on a, en vertu de (X, 1) à partir d'un  $x$ :

$$\delta \lg \lg \Psi'(x) > (k+1) \lg x, \quad (\lg \Psi'(x))^{\delta} > x^{k+1}.$$

L'expression de droite de (X, 10) est donc à partir d'un  $x$

$$\leq k e^{\varepsilon} \frac{(\lg x)^{1+2\delta}}{x}$$

et tend vers 0 avec  $x \rightarrow \infty$ .  $x^k$  est donc bien subordonné à  $\Psi'(x)$ .

Nos conditions (X, 1) sont par exemple satisfaites pour

$$\Psi'(x) = e^{e^x}, \quad \Psi'(x) = e^{e^{e^x}}, \quad \Psi'(x) = e^{e^{(\lg x)^2}}.$$

## XI. Quelques observations sur le théorème A.

Nous établirons enfin quelques propositions supplémentaires relatives au critère A d'Ermakof.

$\alpha$ ) Soient  $\Psi'(x)$  et  $\psi(x)$  deux fonctions positives, continues et dérivables pour  $0 < x_0 \leq x < \infty$  et telles que l'on ait

$$\Psi'(x) \rightarrow \infty, \quad \psi(x) \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty)$$