Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROBLÈMES D'APPROXIMATION DIOPHANTIENNE
Autor: Descombes, Roger
Kapitel: 3. RÉSULTATS DANS LE CAS NON HOMOGÈNE.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36333

où la limite inférieure est prise pour l'ensemble de tous les couples d'entiers p, q tels que $q \neq 0$. MARKOFF a prouvé en 1879 *(Math. Annalen)* que $c(\xi)$ prend, entre sa borne supérieure $1/\sqrt{5}$ et sa limite supérieure $1/3$ une infinité de valeurs isolées, lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels. Les deux premières de ces valeurs isolées, $1/\sqrt{5}$ et $1/\sqrt{8}$, avaient été communiquées peu auparavant par KORKINE et ZOLOTAREFF à MARKOFF, mais ce dernier a fourni un procédé récurrent pour les obtenir toutes. Elles sont de la forme

$$\left(9 - \frac{4}{m_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

où l'entier m_n, qui tend vers l'infini avec n, prend les valeurs successives

$$1,\ 2,\ 5,\ 13,\ 29,\ 34,\ 89,\ 169,\ 194,\ 233,\ 433,\ \ldots$$

Ces valeurs sont tous les entiers positifs qui, associés en triplets convenables, constituent les solutions en nombres entiers de l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3\,x\,y\,z\,.$$

En outre, chacune des valeurs de $c(\xi)$ strictement supérieures à $1/3$ n'est obtenue que par des irrationnels ξ *équivalents* à l'un quelconque d'entre eux, c'est-à-dire déduits de ce dernier par une transformation homographique à coefficients entiers de déterminant égal à ± 1. Ces nombres ξ sont de plus tous quadratiques.

3. Résultats dans le cas non homogène.

Dans le cas non homogène, la symétrisation de la ligne polygonale n'est plus indifférente, car elle équivaut au remplacement de η par $-\eta$. Plus précisément, en introduisant la fonction

$$c(\xi, \eta) = \varliminf_{v \neq 0} |v(v\xi - u - \eta)| \qquad (\xi \text{ irrationnel, } \eta \text{ réel})$$

où la limite inférieure est prise pour l'ensemble de tous les couples d'entiers, u, v tels que $v \neq 0$, et la fonction

$$c^+(\xi, \eta) = \varliminf_{v > 0} v\,|v\xi - u - \eta| \qquad (\xi \text{ irrationnel, } \eta \text{ réel})$$

où on se borne aux couples d'entiers u, v tels que $v > 0$, on a

$$c(\xi, \eta) = \inf \left[c^+ (\xi, \eta)\,,\quad c^+ (\xi, -\eta)\right].$$

Lorsque ξ décrit l'ensemble des irrationnels, et η celui des réels sous la condition $\eta \not\equiv q\,\xi$ (mod. 1), il n'est donc pas surprenant que la borne supérieure de $c(\xi, \eta)$ soit plus petite que la borne supérieure $1/\sqrt{5}$ de $c(\xi) = c^+ (\xi, 0)$. En fait, MINKOWSKI a prouvé en 1893 que cette borne supérieure de $c(\xi, \eta)$ est égale à $1/4$, et GRACE a montré en 1916 qu'elle est en même temps la limite supérieure de $c(\xi, \eta)$ dans les mêmes conditions, c'est-à-dire qu'elle n'est pas isolée dans l'ensemble des valeurs de $c(\xi,\eta)$, contrairement à $1/\sqrt{5}$ dans celui des valeurs de $c(\xi)$.

C'est seulement en 1926 que KHINTCHINE, puis MORIMOTO ont abordé le problème des grandes valeurs de $c^+ (\xi, \eta)$, dans la perspective des résultats obtenus par MARKOFF dans le cas homogène. Le premier résultat « précis » spécifique de ce problème non-homogène asymétrique a été obtenu en 1954 par CASSELS (*Math. Annalen*, t. 127, pp. 288-304) qui a déterminé la plus grande valeur de $c^+ (\xi, \eta)$ dans le cas où $\eta \not\equiv q\,\xi$ (mod. 1). En fait, la fonction $c^+ (\xi, \eta)$ présente un comportement analogue à celui découvert par MARKOFF pour $c(\xi)$. Elle prend entre sa borne supérieure et sa limite supérieure une infinité de valeurs isolées

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\quad \frac{27}{28\sqrt{7}}\,,\quad \frac{1}{\sqrt{8}}\,,\quad \frac{359}{45\sqrt{510}}\,,\quad \frac{37}{10\sqrt{110}}\,,\ \ldots$$

que j'ai déterminées en 1956 (*Annales Ec. Norm. Sup.*, t. 73, pp. 283-355) à l'exception des deux premières, dues respectivement à KHINTCHINE (1935) et CASSELS (1954).

En outre, chacune des valeurs de $c^+ (\xi, \eta)$ strictement supérieures à sa limite supérieure

$$\frac{773\,868 - 28\,547\sqrt{510}}{366\,795} = 0{,}352\ \ldots$$

n'est obtenue que pour des couples (ξ, η) *équivalents* à l'un quelconque d'entre eux, c'est-à-dire liés à lui par des transformations homographiques à coefficients entiers convenables. Chacun de ces couples est constitué de deux nombres ξ, η appartenant à un même corps quadratique, et on peut même choisir η rationnel, égal par exemple dans les cinq cas cités plus haut respectivement à 0, 1/14, 0, 1/90 et 1/10. Les valeurs $1/\sqrt{5}$ et $1/\sqrt{8}$ de $c^+(\xi, \eta)$ correspondent donc en fait aux deux premières valeurs du cas homogène; mais la limite supérieure de $c^+(\xi, \eta)$ est plus grande que la troisième valeur de $c(\xi)$ trouvée par MARKOFF.

4. Méthode des suites de meilleure approximation.

Une méthode générale utilisée dans ces questions consiste à choisir parmi tous les couples d'entiers une suite de couples qui d'une part conduise à la limite inférieure notée $c(\xi)$ ou $c^+(\xi, \eta)$ selon le cas, et qui d'autre part soit suffisamment maniable par exemple calculable par récurrence.

La définition d'une telle suite est susceptible de plusieurs variantes. Dans le cas du problème homogène, MARKOFF s'est servi de la suite des réduites p_n/q_n du développement de ξ en fraction continue ordinaire, qui sont déterminées comme on sait par

$$q_{-1} = 0, \qquad q_0 = 1$$

$$p_{-1} = 1, \qquad p_0 = a_0 = [\xi] \quad \text{(plus grand entier} \leqslant \xi)$$

et

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \qquad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \qquad (n \geqslant 1)$$

où

$$a_n = \left[x_n = -\frac{q_{n-2}\xi - p_{n-2}}{q_{n-1}\xi - p_{n-1}} \right].$$

Du point de vue de l'approximation, la qualité essentielle de la suite (p_n, q_n) tient à la propriété suivante, valable pour tous les couples d'entiers (p, q):

si $(p, q) \neq (0, 0)$ et $|q\xi - p| < |q_n\xi - p_n|$, alors $|q| \geqslant q_{n+1}$.

Cette propriété, que nous traduirons en disant que la suite (p_n, q_n) est une *suite de meilleure approximation* pour ξ, implique évidemment

$$c(\xi) = \varliminf_{n \to +\infty} q_n |q_n\xi - p_n|.$$