Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1960)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PLUS PETIT COUVERCLE CIRCULAIRE DE n POINTS

Kapitel: Lemmes

Autor: Ehrhart, E.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36335

LE PLUS PETIT COUVERCLE CIRCULAIRE DE n POINTS

par E. Ehrhart

(Reçu le 20 mars 1960)

Un ensemble E de n points étant donné dans le plan, nous nous proposons de construire leur plus petit couvercle circulaire, c'est-à-dire le plus petit cercle tel qu'aucun de ces points ne lui soit extérieur. Il est bien possible que ce problème ait déjà été posé et résolu. En donnant notre solution, nous voulons simplement attirer l'attention sur cette question, qui ne demande que des connaissances très élémentaires et nous paraît susceptible d'intéresser l'élève et de développer chez lui l'esprit méthodique.

A priori il semble qu'on sera conduit à choisir entre un nombre fini, mais éventuellement grand, de cercles. Il s'agit donc, d'une part, d'éliminer rapidement le plus grand nombre possible de cercles et, d'autre part, de trouver un critère permettant de reconnaître si un cercle, solution présumée, convient. La construction du cercle cherché (C) sera une conséquence immédiate de quelques observations:

Lemmes

1. On sait qu'il existe un polygone convexe bien déterminé qui a pour sommets des points de E et tel qu'aucun des points de E ne lui soit extérieur. *On peut supprimer tous les points autres que l'ensemble* E′ *des sommets du polygone*, car si un cercle couvre E′, il couvre nécessairement E.

2. Appelons cordes les côtés et les diagonales du polygone. *Si les angles construits sur la plus grande corde* C *et ayant pour sommets les autres points de E′ sont tous obtus ou droits*, (C) *est le*

cercle de diamètre c, car il couvre tous les points de E′, et tout cercle couvrant c a un diamètre au moins égal à c.

3. *Si le cercle de diamètre* c *ne convient pas*, (C) *est circonscrit à un triangle acutangle ayant pour sommets trois points de* E′.

Considérons un cercle couvrant E′ sans passer par un de ses points, et soit r la plus grande distance d'un point de E′ au centre. Le cercle concentrique de rayon r est donc un couvercle plus petit. Si ce cercle (O) passe par un seul point A de E′, une homothétie de centre A et de rapport convenable transformera (O) en un cercle (O_1) couvrant E′ et passant par deux points A, B de cet ensemble. Si ce sont les seuls points de E′ situés sur (O_1), considérons un point C de E′, tel que l'angle ACB soit minimum. Cet angle étant aigu (sans quoi on retomberait sur le cas 2 exclu), le cercle (O_2) circonscrit à ABC est un couvercle plus petit que (O_1). Si (O_1) passe par A, B et un troisième point C de E′, (O_1) jouera dans la suite le rôle de (O_2).

Le triangle ABC ne peut avoir un angle droit, car le côté opposé serait le diamètre de (C) et l'on retomberait encore sur le cas 2. S'il a un angle obtus en A ou B, soit $\hat{A}$ pour fixer les idées, deux cas sont à envisager:

a) (O_2) passe par un quatrième point C′, situé nécessairement sur l'arc $\overset{\frown}{ACB}$. Le centre O_2 ne peut se trouver sur un côté ou une diagonale du quadrilatère convexe qui a les quatre points pour sommets, car ce segment serait un diamètre et l'on retrouverait le cas 2. Si O_2 est intérieur au quadrilatère, il est intérieur à l'un des triangles qu'on peut former avec trois sommets du quadrilatère, et ce triangle est donc acutangle. Si O_2 est extérieur au quadrilatère, son côté le plus voisin de O est OC ou OC′, soit OC pour fixer les idées. Considérons le point D de E′ tel que $\widehat{BDC}$ soit minimum. Nécessairement la droite BC′ passe entre le côté AC et le sommet D de cet angle aigu. Le cercle (O_3) circonscrit à BCD sera donc un couvercle plus petit que (O_2);

b) Si (O_2) ne porte aucun point de E′ autre que A, B, C et que $\hat{A}$, par exemple, est obtus, on considère le point D de E′ tel que

$\widehat{BDC}$ soit minimum (il est aigu et la droite BC passe entre A et D). Le cercle (O_3) circonscrit à BCD est un couvercle plus petit que (O_2).

En continuant l'opération avec le triangle BCD, etc., on arrive nécessairement à un triangle acutangle dont les sommets appartiennent à E′, puisque le nombre de cercles passant par trois points de E′ est limité et que les rayons des cercles successivement rencontrés vont en diminuant.

4. *Un couvercle circulaire de* E′, *circonscrit à un triangle acutangle* ABC *dont les sommets appartiennent à* E′, *est nécessairement le plus petit.* Il résulte en effet de ce qui précède que le plus petit couvercle des trois points A, B, C est le cercle ABC.

5. Soit ABC un triangle acutangle inscrit dans (C) et dont les sommets appartiennent à E′. Les points A, B, C partagent le contour du polygone convexe (P) construit sur E′ en trois lignes brisées (AB), (BC), (CA) dont seules les extrémités appartiennent à l'ensemble des trois points A, B, C. Considérons un sommet M de (P) situé sur (AB) pour fixer les idées. Si l'angle en M de (P) était aigu, l'angle AMB le serait également, ce qui est impossible puisque le quadrilatère convexe ACBM est intérieur à (C). Donc *tout sommet d'angle aigu de* (P) *est un sommet du triangle acutangle inscrit dans* (C).

Construction

Je trace le polygone (P) enveloppe convexe des *n* points donnés. J'envisage, au besoin je construis, le cercle qui a pour diamètre le plus grand des segments de l'ensemble des côtés et des diagonales. S'il ne coupe pas (P), il est la solution (C).

Sinon, je considère les angles aigus de (P). (Il y en a trois au plus, car la somme des angles extérieurs de (P) valant 2π, il ne peut y avoir quatre angles extérieurs obtus.)

S'il en a trois, le cercle passant par leurs sommets est (C).

S'il en a deux de sommets A, B, je considère le sommet C tel que $\widehat{ACB}$ soit minimum. Le cercle ABC est (C).