

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE
Autor: Breny, H.
Kapitel: 1,2. Estimateurs privilégiés.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-36336>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 29.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\mathbf{E} (l^* \mathfrak{z}) = l^* \mathbf{E} \mathfrak{z} = l^* \mathfrak{z} b, \quad (4)$$

d'où

$$\mathfrak{G}: l^* \rightarrow l^* \mathfrak{z} b \quad . \quad 8)$$

\mathfrak{G} est évidemment de rang r .

1, 14. Le noyau de \mathfrak{G} (sous-espace V_0 de V^* formé des vecteurs l^* tels que $\mathfrak{G} l^*$ soit identiquement nul ⁹⁾) est appelé « espace des erreurs » ¹⁰⁾; il est de dimension $n - \text{rg } \mathfrak{G} = n - r$.

Le complément orthogonal de V_0 (sous-espace V_+ de V^* formé des vecteurs m^* pour lesquels $m^* l = 0$ pour tout $l^* \in V_0$) est appelé « espace des estimatrices ». Une estimatrice est donc, par définition, une fonctionnelle linéaire des observations, orthogonale à toute fonctionnelle dont la moyenne est identiquement ⁹⁾ nulle. On remarquera que, V^* étant somme directe de V_0 et V_+ , à toute fonctionnelle linéaire des observations dont la moyenne n'est pas identiquement ⁹⁾ nulle correspond une et une seule fonctionnelle de V_+ ayant identiquement ⁹⁾ même moyenne qu'elle.

Enfin, l'image de \mathfrak{G} (sous-espace B_+ de B^* formé des combinaisons paramétriques b^* pour lesquelles il existe un vecteur $l^* \in V^*$ tel que $\mathbf{E} l^* \mathfrak{z} = b^* b$) s'appelle « espace des combinaisons (paramétriques) estimables ». Nous noterons B_0 un complément quelconque de B_+ .

On sait que la restriction de \mathfrak{G} à V_+ est un isomorphisme de V_+ sur B_+ ; on peut donc énoncer que

toute combinaison estimable est la moyenne d'une et une seule estimatrice, et réciproquement.

1, 2. Estimateurs privilégiés.

1, 21. Si l'on a, pour $l^* \in V^*$, $\mathbf{E} l^* \mathfrak{z} = f^* b$, $f^* b$ est évidemment une combinaison estimable, et $l^* \mathfrak{z}$ en est un estimateur fidèle (au sens de la théorie statistique de l'estimation); si $m^* \in V_0$, $(l^* + m^*) \mathfrak{z}$ est aussi un estimateur fidèle de $f^* b$; pour distinguer, parmi tous ces estimateurs fidèles de $f^* b$, l'unique estimatrice, celle-ci est dite « estimateur privilégié de $f^* b$ », et désignée par $l_f^* \mathfrak{z}$ (donc, par définition, $\mathbf{E} l_f^* \mathfrak{z} = f^* b$ et $l_f^* \in V_+$).

1, 22. Théorème. Parmi tous les estimateurs fidèles de la combinaison estimable $f^* b$, l'estimateur privilégié a la variance minimum.

Soit en effet m^* tel que $E m^* \varepsilon = f^* b$. On a, en posant $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - E \varepsilon$,

$$\begin{aligned} \text{var } m^* \varepsilon &= E [m^* \varepsilon - E m^* \varepsilon] [m^* \varepsilon - E m^* \varepsilon] \\ &= E (m^* \tilde{\varepsilon}) (\tilde{\varepsilon}^* m)^* = m^* (E \tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^*) m. \end{aligned} \quad (5)$$

La définition des propriétés distributionnelles de ε faisant intervenir la base \mathfrak{B} , introduisons cette base pour un calcul explicite:

$$\begin{aligned} E \tilde{\varepsilon} \tilde{\varepsilon}^* &= E \tilde{\varepsilon}_P (\tilde{\varepsilon}_P)^T = E \left\| \begin{array}{cccc} \tilde{\varepsilon}_1^2 & \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 & \dots & \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_n \\ \vdots & & & \\ \tilde{\varepsilon}_n \tilde{\varepsilon}_1 & \dots & & \tilde{\varepsilon}_n^2 \end{array} \right\| \\ &= \mathfrak{J}_n \sigma^2 \end{aligned}$$

d'où

$$\text{var } m^* \varepsilon = (m^* m) \sigma^2.$$

Soit alors

$$m^* = l_f^* + m_0^*,$$

de sorte que

$$l_f^* m_0 = m_0^* l_f = 0;$$

on a

$$\text{var } m^* \varepsilon = (l_f^* l_f) \sigma^2 + (m_0^* m_0) \sigma^2 \geq (l_f^* l_f) \sigma^2 = \text{var } l_f^* \varepsilon,$$

l'inégalité étant d'ailleurs stricte si $m_0^* \neq 0$.

1, 3. Exécution des calculs.

1, 31. Pour l'exécution effective des calculs, il importe d'introduire une base dans chacun des espaces considérés; dans ce paragraphe, V et V^* sont rapportés aux bases \mathfrak{B} et \mathfrak{B}^* , B et B^* sont rapportés à des bases déterminées \mathfrak{H} et \mathfrak{H}^* .

1, 32. Pour que $l^* \in V_0$, il est nécessaire et suffisant que $l^* \mathfrak{A} = 0$; donc

l'espace des erreurs est engendré par ceux des vecteurs de V^ qui sont orthogonaux aux colonnes de la matrice \mathfrak{A} (plus explicitement: $\mathfrak{A}_{P,H}$).*