Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1960)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE

Autor: Breny, H.

Kapitel: 1,4. Moindres carrés.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36336

1, 4. *Moindres carrés.*

A partir de la relation

$$\mathbf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H\ ,$$

le théorème de Gauss-Markov conduit à introduire le vecteur-estimateur $\overset{*}{\mathfrak{b}}$ défini en fonction de l'observation $\mathfrak{x}$ par la condition que

$$S^2(\mathfrak{b}) \equiv (\mathfrak{x} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{b})^T (\mathfrak{x} - \mathfrak{A}\,\mathfrak{b})$$

soit minimum pour $\mathfrak{b} = \overset{*}{\mathfrak{b}}$. Or, comme

$$\frac{d}{d\,b_{i,H}}\,\mathfrak{b}_H = \mathfrak{e}_{i,H}\ ,\quad \frac{d}{d\,b_{i,H}}\,\mathfrak{b}_H^T = \mathfrak{e}_{i,H}^T\ ,$$

et

$$S^2(\mathfrak{b}) = \mathfrak{x}^\star\,\mathfrak{x} - \mathfrak{b}_H^T\,\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^\star\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H + \mathfrak{b}_H^T\,\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H\ ,$$

on a

$$\frac{d\,S^2(\mathfrak{b})}{d\,b_{i,H}} = 2\,(\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{b}_H - \mathfrak{A}^T\,\mathfrak{x})\ .$$

Les conditions $\dfrac{d\,S^2(\overset{*}{\mathfrak{b}})}{d\,b_{i,H}} = 0$ conduisent donc au système

$$\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\overset{*}{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T\,\mathfrak{x}\ ,$$

identique au système normal. Il en résulte que, si $r = p$, les estimateurs de moindres carrés ne sont autres que les estimateurs privilégiés. Si $r < p$, les deux méthodes conduisent aux mêmes combinaisons estimables fondamentales.

2. Distributions et épreuves d'hypothèses.

2, 1. *Sommes des carrés.*

2, 11. Soit $\mathbf{U}^\star$ un sous-espace vectoriel de $\mathbf{V}^\star$; on appelle « somme de carrés due à $\mathbf{U}^\star$ », et on note $\mathbf{SC}\,\mathbf{U}^\star$ [11]), le carré scalaire de la projection orthogonale de $\mathfrak{x}$ sur le dual $\mathbf{U}$ de $\mathbf{U}^\star$. La dimension de $\mathbf{U}^\star$ est, par définition, le « nombre de degrés de liberté » de $\mathbf{SC}\,\mathbf{U}^\star$.