

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE
Autor: Breny, H.
Kapitel: 2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-36336>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 26.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\Delta_a = \frac{l_f^* \mathfrak{z} - a}{\sigma \sqrt{(l_f^* l_f)}} : \frac{\sqrt{\text{SCE}}}{\sigma \sqrt{(n-r)}} = \frac{(l_f^* \mathfrak{z} - a) \sqrt{(n-r)}}{\sqrt{[(l_f^* l_f) \text{SCE}]}}$$

est une aléatoire t_{n-r} , ce qui permet d'éprouver l'hypothèse en question ou d'estimer $f^* b$.

2, 24. Soient $f_1^* b, \dots, f_s^* b$ des combinaisons estimables, linéairement indépendantes, et $l_{f_i}^* \mathfrak{z}$ ($i = 1, \dots, s$) leurs estimateurs privilégiés. **Sous l'hypothèse** $f_1^* b = \dots = f_s^* b = 0$, les moyennes des $l_{f_i}^* \mathfrak{z}$ sont toutes nulles, et donc $(1/\sigma^2) \text{SC}\{l_{f_1}^*, \dots, l_{f_s}^*\}$ est une aléatoire χ_s^2 ; cela entraîne que

$$Q = \frac{\text{SC}\{l_{f_1}^*, \dots, l_{f_s}^*\}/s}{\text{SCE}/(n-r)}$$

est une aléatoire $F_{s, n-r}$. Si l'hypothèse en question est fausse, Q est, en loi, plus grande que $F_{s, n-r}$; on éprouvera donc cette hypothèse en comparant la valeur observée de Q à $F_{s, n-r}$, les grandes valeurs de Q étant critiques.

Remarque. — Il est manifeste que, si α est un nombre certain quelconque, on a $\text{SC}\{\alpha \omega^*\} = \text{SC}\{\omega^*\}$. On peut donc négliger un facteur constant dans le calcul d'une somme de carrés. Il n'en est pas de même dans le calcul de l'expression Δ_a du § 2, 33.

2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.

2, 31. Soient U_q^* et U_{r-q}^* deux sous-espaces complémentaires de V_+ , de dimensions q et $r - q$: $V_+ = U_q^* \oplus U_{r-q}^*$; on ne suppose pas que U_q^* et U_{r-q}^* sont mutuellement orthogonaux. On cherche à interpréter $\text{SC } U_q^*$ et $\text{SC } U_{r-q}^*$. Pour cela, on considère, outre le modèle initial, le modèle où

$$(l^* \in U_{r-q}^*) \quad \text{implique} \quad \mathbf{E} l^* \mathfrak{z} = 0, \quad (11)$$

tandis que $(l^* \in U_q^*)$ implique $\mathbf{E} l^* \mathfrak{z} \neq 0$ pour une valeur au moins de b .

[On pourrait décrire ce modèle ainsi: soit l_1^*, \dots, l_q^* une base de U_q^* , l_{q+1}^*, \dots, l_r^* une base de U_{r-q}^* , et \mathfrak{B} telle que, dans le modèle initial,

$$\hat{b}_H = \mathfrak{B} [l_1^* \mathfrak{z} \dots, l_r^* \mathfrak{z}]^T, \quad \mathbf{E} \mathfrak{z} = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{B} b = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} w;$$

le nouveau modèle est

$$\mathbf{E}^* = \mathfrak{A} \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{B} \mathfrak{w}, \quad \mathfrak{B} = \begin{bmatrix} \mathfrak{S}_q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Soient \mathbf{SCN}_q et \mathbf{SCE}_{n-q} les sommes de carrés normale et des erreurs pour le nouveau modèle, \mathbf{SCN}_r et \mathbf{SCE}_{n-r} les sommes homologues du modèle initial. On a

$$\mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^* = \mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r}.$$

En effet, en notant \mathbf{U}'_q le complément orthogonal de \mathbf{U}_{r-q}^* , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{SCT} &= \mathbf{SC} \mathbf{U}'_q + \mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^* + \mathbf{SCE}_{n-r} \\ &= \mathbf{SCN}_q + \mathbf{SCE}_{n-q}; \end{aligned}$$

or, de quoi se compose l'espace des erreurs du nouveau modèle, $\mathbf{V}_{0, n-q}$? il contient évidemment \mathbf{V}_0 , puis un sous-espace de \mathbf{V}^* , de dimensions $r - q$, disjoint de \mathbf{V}_0 ; par ailleurs, \mathbf{U}_{r-q}^* appartient à $\mathbf{V}_{0, n-q}$ en vertu de (11), et est de dimension $r - q$; donc

$$\mathbf{V}_{0, n-q} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{U}_{r-q}^*;$$

en outre, \mathbf{V}_0 et $\mathbf{U}_{r-q}^* \subset \mathbf{V}_+$ sont mutuellement orthogonaux, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{SCE}_{n-q} &\equiv \mathbf{SC} \mathbf{V}_{0, n-q} = \mathbf{SC} \mathbf{V}_0 + \mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^* \\ &= \mathbf{SCE}_{n-r} + \mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^*, \end{aligned}$$

d'où la thèse; on voit en outre que $\mathbf{SCN}_q = \mathbf{SC} \mathbf{U}'_q \neq \mathbf{SC} \mathbf{U}_q^*$.

2, 32. Il est commode d'introduire la notation suivante ¹²⁾:

$$\begin{aligned} \mathbf{SCT} - \mathbf{SCE}_{n-q} &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*], \\ \mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r} &= \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] (\neq \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^*]). \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] + \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] + \mathbf{SCE}_{n-r}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{red} [\mathbf{U}_{r-q}^* \mid \mathbf{U}_q^*] &= \mathbf{SC} \mathbf{U}_{r-q}^*, \\ \mathbf{red} [\mathbf{U}_q^*] &= \mathbf{SC} \mathbf{U}'_q \neq \mathbf{SC} \mathbf{U}_q^*. \end{aligned}$$

Bien entendu, les relations obtenues en permutant les rôles de \mathbf{U}_q^* et \mathbf{U}_{r-q}^* sont aussi valables; ces rôles ne sont évidemment

pas symétriques, à moins que U_q^* et U_{r-q}^* ne soient mutuellement orthogonaux; dans ce dernier cas,

$$\begin{aligned} \text{red } [U_q^*] &= \text{red } [U_q^* \mid U_{r-q}^*] = \text{SC } U_q^* , \\ \text{red } [U_{r-q}^*] &= \text{red } [U_{r-q}^* \mid U_q^*] = \text{SC } U_{r-q}^* . \end{aligned}$$

2, 33. Ces considérations s'étendent aisément au cas où V_+ est décomposé en plus de deux sous-espaces, suivant le schéma

$$\begin{cases} V_+ = U_1^* \oplus U_2^* \oplus \dots \oplus U_t^* , \\ \dim U_i^* = r_i , \quad r_1 + \dots + r_t = \rho_k ; \rho_t = r . \end{cases}$$

On doit alors considérer t modèles successifs (et l'ordre dans lequel ces modèles font intervenir les U_i^* est essentiel); le $k^{\text{ème}}$ de ces modèles est caractérisé par

$$\left[l^* \in \bigoplus_{k+1}^t U_i^* \right] \text{ implique } \mathbf{E} l^* \neq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, t-1) ,$$

le $t^{\text{ème}}$ étant le modèle initial. On note $\text{SCE}_{n-\rho_k}$ la somme de carrés des erreurs attachée au $k^{\text{ème}}$ modèle, et on montre sans peine que

$$\text{SC} \left(\bigoplus_{k+1}^t U_i^* \right) = \text{SCE}_{n-\rho_k} - \text{SCE}_{n-r} ;$$

on pose alors

$$\begin{aligned} \text{red } [U_1^*] &= \text{SCT} - \text{SCE}_{n-\rho_1} \\ \text{red } [U_{k+1}^* \mid U_1^*, \dots, U_k^*] &= \text{SCE}_{n-\rho_k} - \text{SCE}_{n-\rho_{k+1}} , \end{aligned}$$

et on a

$$\text{SCN} = \text{red } [U_1^*] + \sum_1^{t-1} \text{red } [U_{k+1}^* \mid U_1^*, \dots, U_k^*] , \quad (12)$$

avec

$$\text{red } [U_t^* \mid U_1^*, \dots, U_{t-1}^*] = \text{SC } U_t^* ,$$

cette dernière relation n'étant pas généralement vraie pour les autres U_i^* (exception évidente: le cas où les U_i^* sont mutuellement orthogonaux).

2, 4. *Ecart au modèle.*

Tout ce qui précède est valide si, réellement, $\mathbf{E} \neq \mathcal{A}b$. S'il n'en est pas nécessairement ainsi, ce qui arrive lorsque le modèle