Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 6 (1960)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE

Autor: Breny, H.

Kapitel: 2, 3. Sous-espaces disjoints non orthogonaux.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-36336

$$\Delta_a = \frac{\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{x} - a}{\sigma\sqrt{(\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{l}_f)}} : \frac{\sqrt{\mathbf{SC}\,\mathrm{E}}}{\sigma\sqrt{(n-r)}} = \frac{(\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{x} - a)\sqrt{(n-r)}}{\sqrt{[(\mathfrak{l}_f^\star \mathfrak{l}_f)\,\mathbf{SC}\,\mathrm{E}]}}$$

est une aléatoire $\mathbf{t}_{n-r}$, ce qui permet d'éprouver l'hypothèse en question ou d'estimer $\mathfrak{f}^\star \mathfrak{b}$.

2, 24. Soient $\mathfrak{f}_1^\star \mathfrak{b}, \ldots, \mathfrak{f}_s^\star \mathfrak{b}$ des combinaisons estimables, linéairement indépendantes, et $\mathfrak{l}_{f_i}^\star \mathfrak{x}$ $(i = 1, \ldots, s)$ leurs estimateurs privilégiés. **Sous l'hypothèse** $\mathfrak{f}_1^\star \mathfrak{b} = \ldots = \mathfrak{f}_s^\star \mathfrak{b} = 0$, les moyennes des $\mathfrak{l}_{f_i}^\star \mathfrak{x}$ sont toutes nulles, et donc $(1/\sigma^2)\,\mathbf{SC}\{\mathfrak{l}_{f_1}^\star, \ldots, \mathfrak{l}_{f_s}^\star\}$ est une aléatoire χ_s^2; cela entraîne que

$$\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{SC}\{\mathfrak{l}_{f_1}^\star, \ldots, \mathfrak{l}_{f_s}^\star\}/s}{\mathbf{SC}\,\mathrm{E}/(n-r)}$$

est une aléatoire $\mathbf{F}_{s,\,n-r}$. Si l'hypothèse en question est fausse, $\mathbf{Q}$ est, en loi, plus grande que $\mathbf{F}_{s,\,n-r}$; on éprouvera donc cette hypothèse en comparant la valeur observée de $\mathbf{Q}$ à $\mathbf{F}_{s,\,n-r}$, les grandes valeurs de $\mathbf{Q}$ étant critiques.

Remarque. — Il est manifeste que, si α est un nombre certain quelconque, on a $\mathbf{SC}\{\alpha\mathfrak{w}^\star\} = \mathbf{SC}\{\mathfrak{w}^\star\}$. On peut donc négliger un facteur constant dans le calcul d'une somme de carrés. Il n'en est pas de même dans le calcul de l'expression Δ_a du § 2, 33.

2, 3. *Sous-espaces disjoints non orthogonaux.*

2, 31. Soient $\mathsf{U}_q^\star$ et $\mathsf{U}_{r-q}^\star$ deux sous-espaces complémentaires de V_+, de dimensions q et $r - q$: $\mathsf{V}_+ = \mathsf{U}_q^\star \oplus \mathsf{U}_{r-q}^\star$; on ne suppose pas que $\mathsf{U}_q^\star$ et $\mathsf{U}_{r-q}^\star$ sont mutuellement orthogonaux. On cherche à interpréter $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}_q^\star$ et $\mathbf{SC}\,\mathsf{U}_{r-q}^\star$. Pour cela, on considère, outre le modèle initial, le modèle où

$$(\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{U}_{r-q}^\star) \quad \text{implique} \quad \mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star \mathfrak{x} = 0\,, \qquad (11)$$

tandis que $(\mathfrak{l}^\star \in \mathsf{U}_q^\star)$ implique $\mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star \mathfrak{x} \neq 0$ pour une valeur au moins de $\mathfrak{b}$.

[On pourrait décrire ce modèle ainsi: soit $\mathfrak{l}_1^\star, \ldots, \mathfrak{l}_q^\star$ une base de $\mathsf{U}_q^\star$, $\mathfrak{l}_{q+1}^\star, \ldots, \mathfrak{l}_r^\star$ une base de $\mathsf{U}_{r-q}^\star$, et $\mathfrak{W}$ telle que, dans le modèle initial,

$$\hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{W}\left[\mathfrak{l}_1^\star \mathfrak{x} \ldots, \mathfrak{l}_r^\star \mathfrak{x}\right]^T, \qquad \mathbf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{W}^{-1}\,\mathfrak{W}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{W}^{-1}\,\mathfrak{w}\;;$$

le nouveau modèle est

$$\mathbf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{W}^{-1}\,\mathfrak{Z}\,\mathfrak{w}\,, \qquad \mathfrak{Z} = \left\| \begin{matrix} \mathfrak{I}_q & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \Big]$$

Soient $\mathbf{SCN}_q$ et $\mathbf{SCE}_{n-q}$ les sommes de carrés normale et des erreurs pour le nouveau modèle, $\mathbf{SCN}_r$ et $\mathbf{SCE}_{n-r}$ les sommes homologues du modèle initial. On a

$$\mathbf{SC}\,\mathsf{U}^{\star}_{r-q} = \mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r}\,.$$

En effet, en notant U'_q le complément orthogonal de $\mathsf{U}^{\star}_{r-q}$, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{SCT} &= \mathbf{SC}\,\mathsf{U}'_q + \mathbf{SC}\,\mathsf{U}^{\star}_{r-q} + \mathbf{SCE}_{n-r} \\ &= \mathbf{SCN}_q + \mathbf{SCE}_{n-q}\;; \end{aligned}$$

or, de quoi se compose l'espace des erreurs du nouveau modèle, $\mathsf{V}_{0,\,n-q}$? il contient évidemment V_0, puis un sous-espace de $\mathsf{V}^{\star}$, de dimensions $r - q$, disjoint de V_0; par ailleurs, $\mathsf{U}^{\star}_{r-q}$ appartient à $\mathsf{V}_{0,\,n-q}$ en vertu de (11), et est de dimension $r - q$; donc

$$\mathsf{V}_{0,\,n-q} = \mathsf{V}_0 \oplus \mathsf{U}^{\star}_{r-q}\;;$$

en outre, V_0 et $\mathsf{U}^{\star}_{r-q} \subset \mathsf{V}_+$ sont mutuellement orthogonaux, donc

$$\begin{aligned} \mathbf{SCE}_{n-q} \equiv \mathbf{SC}\,\mathsf{V}_{0,\,n-q} &= \mathbf{SC}\,\mathsf{V}_0 + \mathbf{SC}\,\mathsf{U}^{\star}_{r-q} \\ &= \mathbf{SCE}_{n-r} + \mathbf{SC}\,\mathsf{U}^{\star}_{r-q}\,, \end{aligned}$$

d'où la thèse; on voit en outre que $\mathbf{SCN}_q = \mathbf{SC}\,\mathsf{U}'_q \neq \mathbf{SC}\,\mathsf{U}^{\star}_q$.

2, 32. Il est commode d'introduire la notation suivante [12]):

$$\mathbf{SCT} - \mathbf{SCE}_{n-q} = \mathbf{red}\left[\mathsf{U}^{\star}_q\right],$$

$$\mathbf{SCE}_{n-q} - \mathbf{SCE}_{n-r} = \mathbf{red}\left[\mathsf{U}^{\star}_{r-q} \mid \mathsf{U}^{\star}_q\right]\left(\neq \mathbf{red}\left[\mathsf{U}^{\star}_{r-q}\right]\right).$$

On a alors

$$\mathbf{SCT} = \mathbf{red}\left[\mathsf{U}^{\star}_q\right] + \mathbf{red}\left[\mathsf{U}^{\star}_{r-q} \mid \mathsf{U}^{\star}_q\right] + \mathbf{SCE}_{n-r}$$

avec

$$\mathbf{red}\left[\mathsf{U}^{\star}_{r-q} \mid \mathsf{U}^{\star}_q\right] = \mathbf{SC}\,\mathsf{U}^{\star}_{r-q}\,,$$

$$\mathbf{red}\left[\mathsf{U}^{\star}_q\right] = \mathbf{SC}\,\mathsf{U}'_q \neq \mathbf{SC}\,\mathsf{U}^{\star}_q\,.$$

Bien entendu, les relations obtenues en permutant les rôles de $\mathsf{U}^{\star}_q$ et $\mathsf{U}^{\star}_{r-q}$ sont aussi valables; ces rôles ne sont évidemment pas symétriques, à moins que $\mathsf{U}_q^\star$ et $\mathsf{U}_{r-q}^\star$ ne soient mutuellement orthogonaux; dans ce dernier cas,

$$\mathbf{red}\left[\mathsf{U}_q^\star\right] = \mathbf{red}\left[\mathsf{U}_q^\star \;\middle|\; \mathsf{U}_{r-q}^\star\right] = \mathbf{SC}\,\mathsf{U}_q^\star ,$$

$$\mathbf{red}\left[\mathsf{U}_{r-q}^\star\right] = \mathbf{red}\left[\mathsf{U}_{r-q}^\star \;\middle|\; \mathsf{U}_q^\star\right] = \mathbf{SC}\,\mathsf{U}_{r-q}^\star .$$

2, 33. Ces considérations s'étendent aisément au cas où V_+ est décomposé en plus de deux sous-espaces, suivant le schéma

$$\begin{cases} \mathsf{V}_+ = \mathsf{U}_1^\star \oplus \mathsf{U}_2^\star \oplus \dots \oplus \mathsf{U}_t^\star , \\ \dim \mathsf{U}_i^\star = r_i , \quad r_1 + \dots + r_k = \rho_k; \; \rho_t = r . \end{cases}$$

On doit alors considérer t modèles successifs (et l'ordre dans lequel ces modèles font intervenir les $\mathsf{U}_i^\star$ est essentiel); le $k^{\text{ème}}$ de ces modèles est caractérisé par

$$\left[\mathfrak{l}^\star \in \bigoplus_{k+1}^{t} \mathsf{U}_i^\star\right] \quad \text{implique} \quad \mathbf{E}\,\mathfrak{l}^\star \mathfrak{x} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots, t-1) ,$$

le $t^{\text{ème}}$ étant le modèle initial. On note $\mathbf{SCE}_{n-\rho_k}$ la somme de carrés des erreurs attachée au $k^{\text{ème}}$ modèle, et on montre sans peine que

$$\mathbf{SC}\left(\bigoplus_{k+1}^{t} \mathsf{U}_i^\star\right) = \mathbf{SCE}_{n-\rho_k} - \mathbf{SCE}_{n-r} ;$$

on pose alors

$$\mathbf{red}\left[\mathsf{U}_1^\star\right] = \mathbf{SCT} - \mathbf{SCE}_{n-\rho_1}$$

$$\mathbf{red}\left[\mathsf{U}_{k+1}^\star \;\middle|\; \mathsf{U}_1^\star, \dots, \mathsf{U}_k^\star\right] = \mathbf{SCE}_{n-\rho_k} - \mathbf{SCE}_{n-\rho_{k+1}} ,$$

et on a

$$\mathbf{SCN} = \mathbf{red}\left[\mathsf{U}_1^\star\right] + \sum_{1}^{t-1} \mathbf{red}\left[\mathsf{U}_{k+1}^\star \;\middle|\; \mathsf{U}_1^\star, \dots, \mathsf{U}_k^\star\right] , \tag{12}$$

avec

$$\mathbf{red}\left[\mathsf{U}_t^\star \;\middle|\; \mathsf{U}_1^\star , \dots, \mathsf{U}_{t-1}^\star\right] = \mathbf{SC}\,\mathsf{U}_t^\star ,$$

cette dernière relation n'étant pas généralement vraie pour les autres $\mathsf{U}_i^\star$ (exception évidente: le cas où les $\mathsf{U}_i^\star$ sont mutuellement orthogonaux).

2, 4. *Ecarts au modèle.*

Tout ce qui précède est valide si, réellement, $\mathbf{E}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{b}$. S'il n'en est pas nécessairement ainsi, ce qui arrive lorsque le modèle