

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 6 (1960)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES CORPS QUADRATIQUES
Autor: Châtelet, A.
Kapitel: 12. Multiplication des idéaux fractionnaires.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-36339>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 16.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LES CORPS QUADRATIQUES

par A. CHÂTELET

(suite)

CHAPITRE II

DIVISIBILITÉ DES IDÉAUX

12. Multiplication des idéaux fractionnaires.

Entre les idéaux fractionnaires, d'un corps quadratique, on définit une opération, appelée *multiplication*, dont on vérifie qu'elle est déterminée, commutative et associative, et que l'opération inverse, appelée *division* est possible et déterminée, à l'exception de la division par un idéal nul.

DÉFINITION. — Le **produit** (résultat de la multiplication) de deux idéaux :

$$\mathbf{I} = (\dots, \rho_i, \dots), \quad i \text{ de } 1 \text{ à } h; \quad \mathbf{J} = (\dots, \sigma_j, \dots), \quad j \text{ de } 1 \text{ à } k;$$

(définis par des bases algébriques (10. 1) de h et k générateurs), est l'idéal, désigné par $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$, dont une base algébrique est constituée par les produits mutuels des générateurs, des idéaux multipliés :

$$\mathbf{I} \times \mathbf{J} = (\dots, \omega_{ij}, \dots); \quad \omega_{ij} = \rho_i \times \sigma_j, \quad \text{en nombre } h \times k.$$

Ce produit, qui est ainsi défini, est *déterminé*, c'est-à-dire indépendant des bases adoptées pour définir les idéaux multipliés.

C'est en effet l'ensemble des éléments du corps, de la forme :

$$\sum \xi_{ij} \times \omega_{ij} = \sum \xi_{ij} \times (\rho_i \times \sigma_j); \quad \xi_{ij} \in \mathbf{E}(\theta);$$

(les ξ_{ij} étant des entiers arbitraires du corps). Cet ensemble est, par suite égal à l'ensemble des différences (et des sommes) mutuelles des produits de chaque élément de \mathbf{I} par chaque élément de \mathbf{J} ; ce qui est bien une construction indépendante des bases choisies.

La multiplication est manifestement *commutative*, comme celle des éléments du corps; elle s'étend à un nombre quelconque d'idéaux; elle est *associative*; car les générateurs d'un produit de trois idéaux peuvent s'écrire indifféremment:

$$\omega_{ijk} = (\rho_i \times \sigma_j) \times \tau_k = \rho_i \times (\sigma_j \times \tau_k).$$

La conjugaison conserve la multiplication: *le conjugué d'un produit (d'idéaux) est égal au produit des conjugués (de ces idéaux)*

$$(\mathbf{I} \times \mathbf{J})' = \mathbf{I}' \times \mathbf{J}'.$$

Il suffit en effet de définir \mathbf{I}' et \mathbf{J}' par les générateurs conjugués de ceux de \mathbf{I} et \mathbf{J} ; leurs produits mutuels seront les conjugués des générateurs de définition de $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$.

12. 2. Cas particuliers.

Le produit, d'un idéal \mathbf{I} , par un idéal principal (ρ) est égal au produit, de \mathbf{I} , par (l'élément de) la base ρ (8. 4)

$$(\rho) \times \mathbf{I} = \rho \times \mathbf{I};$$

notamment:

$$(0) \times \mathbf{I} = (0); \quad (1) \times \mathbf{I} = 1 \times \mathbf{I} = \mathbf{I}; \quad (\rho) \times (\sigma) = \rho \times (\sigma) = (\rho \times \sigma).$$

L'idéal unité (1), ou $\mathbf{E}(\theta)$, est un élément neutre pour la multiplication, d'où son nom, on montre ci-dessous (14) que c'est le seul.

Le produit $\mathbf{I} \times \mathbf{F}$, par un idéal entier \mathbf{F} , est inclus dans \mathbf{I} , car les produits des générateurs de \mathbf{I} par ceux de \mathbf{F} , qui sont des entiers du corps, appartiennent à \mathbf{I} (3 de la condition caractéristique; 8. 2).

Le produit de deux, ou plusieurs, idéaux entiers est un idéal entier, qui est inclus dans chacun d'eux.

12. 3. Base arithmétique.

On peut distinguer le cas d'idéaux définis par une base arithmétique (9. 1), c'est ce que précise l'énoncé:

Si, dans la multiplication de deux idéaux \mathbf{I} et \mathbf{J} , dont les termes des bases sont ρ_i et σ_j , l'un d'eux, au moins, est défini par

une base arithmétique, les produits des générateurs $\rho_i \times \sigma_j$, forment une base arithmétique, du produit $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$:

$$(\dots, \rho_i, \dots) \text{ arithmétique} \Rightarrow (\dots, \rho_i \times \sigma_j, \dots) \text{ arithmétique.}$$

Il suffit d'utiliser le théorème caractéristique (9.5) des bases arithmétiques. En prenant une base τ , de (1), l'hypothèse est exprimée par l'existence de nombres entiers z_{ir} , tels que:

$$\rho_i \times \tau = \sum z_{ir} \times \rho_r; \quad \text{tout } i \text{ de } 1 \text{ à } h; \quad r \text{ de } 1 \text{ à } h.$$

Cette même condition est alors remplie par les produits, car:

$$(\rho_i \times \sigma_j) \times \tau = (\rho_i \times \tau) \times \sigma_j = \sum z_{ir} \times (\rho_r \times \sigma_j); \quad r \text{ de } 1 \text{ à } h; \quad \text{tous } i, j.$$

On a déjà utilisé, en fait, un cas particulier de cette construction, en formant une base arithmétique d'un idéal défini par une base algébrique (10.4) (notamment d'un idéal principal, 11.2); il est égal à son produit par l'idéal (1), qui peut être défini par une base arithmétique de deux termes $\gamma_1 \gamma_2$, de sorte que:

$$(\dots, \rho_i, \dots) = (\gamma_1, \gamma_2) \times (\dots, \rho_i, \dots) = (\dots, \gamma_1 \times \rho_i, \gamma_2 \times \rho_i, \dots).$$

C'est la base, qui a été justifiée par un raisonnement direct.

Un autre cas particulier d'une telle multiplication est donnée par la forme canonique d'un idéal (8.1), ce qu'expriment les égalités:

$$q \times (m, \theta - c) = (q) \times (m, \theta - c) = (q \times m, q \times (\theta - c)).$$

L'idéal est égal au produit de l'idéal principal (q) , de base q , par l'idéal canonique, de base arithmétique $m, \theta - c$, d'où la base arithmétique $q \times m, q \times (\theta - c)$.

13. Propriétés des normes.

On va étudier, plus spécialement, la multiplication d'idéaux, mis sous leur forme canonique, et en déduire des propriétés des normes, qui justifient leur définition, donnée ci-dessus, à priori (8.1).