*une base arithmétique, les produits des générateurs* $\rho_i \times \sigma_j$, *forment une base arithmétique*, du produit $\mathbf{I} \times \mathbf{J}$:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) \text{ arithmétique} \quad \Rightarrow \quad (\ldots,\rho_i \times \sigma_j,\ldots) \text{ arithmétique.}$$

Il suffit d'utiliser le théorème caractéristique (**9. 5**) des bases arithmétiques. En prenant une base 1 $\tau$, de (1), l'hypothèse est exprimée par l'existence de nombres entiers $z_{ir}$, tels que:

$$\rho_i \times \tau = \Sigma z_{ir} \times \rho_r; \qquad \text{tout } i \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad r \text{ de } 1 \text{ à } h.$$

Cette même condition est alors remplie par les produits, car:

$$(\rho_i \times \sigma_j) \times \tau = (\rho_i \times \tau) \times \sigma_j = \Sigma z_{ir} \times (\rho_r \times \sigma_j); \qquad r \text{ de } 1 \text{ à } h; \qquad \text{tous } i,j.$$

On a déjà utilisé, en fait, un cas particulier de cette construction, en formant une base arithmétique d'un idéal défini par une base algébrique (**10. 4**) (notamment d'un idéal principal, **11. 2**); il est égal à son produit par l'idéal (1), qui peut être défini par une base arithmétique de deux termes $\gamma_1 \, \gamma_2$, de sorte que:

$$(\ldots,\rho_i,\ldots) = (\gamma_1, \gamma_2) \times (\ldots,\rho_i,\ldots) = (\ldots,\gamma_1 \times \rho_i,\gamma_2 \times \rho_i,\ldots).$$

C'est la base, qui a été justifiée par un raisonnement direct.

Un autre cas particulier d'une telle multiplication est donnée par la forme canonique d'un idéal (**8. 1**), ce qu'expriment les égalités:

$$q \times (m,\ \theta - c) = (q) \times (m,\ \theta - c) = (q \times m,\ q \times (\theta - c)).$$

L'idéal est égal au produit de l'idéal principal $(q)$, de base $q$, par l'idéal canonique, de base arithmétique $m$, $\theta - c$, d'où la base arithmétique $q \times m$, $q \times (\theta - c)$.

## 13. Propriétés des normes.

On va étudier, plus spécialement, la multiplication d'idéaux, mis sous leur forme canonique, et en déduire des propriétés des normes, qui justifient leur définition, donnée ci-dessus, à priori (**8. 1**).

THÉORÈME des normes. — *Le produit de deux idéaux conjugués est égal à l'idéal principal rationnel, dont une base est leur norme commune* (nombre rationnel positif, défini **8. 1**):

$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}' = (\text{norme de } \mathbf{I}) \quad \text{ou} \quad (N(\mathbf{I})).$$

*La norme d'un produit* d'idéaux est égal au *produit de leurs normes*

$$\text{norme } (\mathbf{I}\times\mathbf{J}) = \text{norme de } \mathbf{I} \times \text{norme de } \mathbf{J}.$$

On peut établir d'abord la première propriété, pour un idéal canonique:

$$\mathbf{M} = (m,\ \theta - c), \qquad \mathbf{M}' = (m,\ \theta' - c);$$

une base (arithmétique) du produit $\mathbf{M}\times\mathbf{M}'$ est formée du produit des générateurs:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = (m^2,\ m\times(\theta - c),\ m\times(\theta' - c),\ (\theta - c)\times(\theta' - c)).$$

Le dernier terme est égal à l'entier rationnel $F(c) = \pm m\times n$, de sorte que $m$ peut être mis en facteur commun:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = m\times\mathbf{E}_1 = (m)\times\mathbf{E}_1; \qquad \mathbf{E}_1 = (m,\ \theta - c,\ \theta' - c,\ n).$$

L'idéal $\mathbf{E}_1$ contient les éléments suivants qui sont des entiers rationnels:

$$m, \quad n, \quad \theta - c + \theta' - c = S - 2c \equiv c' - c, \quad (\text{mod. } m),$$

où $c'$ est zéro conjugué de $c$, de la congruence fondamentale, mod. $m$. On vérifie qu'ils sont premiers entre eux, en constatant qu'un nombre premier $p$ ne peut les diviser simultanément. Il suffit de se borner à un diviseur $p$, de $m$, il divise les entiers $F(c)$, et $F(c')$ qui sont divisibles par $m$. Alors, *ou bien* $p$ ne divise pas le discriminant du corps, les zéros $c$ et $c'$ de la congruence fondamentale sont distincts et $p$ ne divise pas $c' - c$. *Ou bien*, il y a une racine double $c$ et $c'$ étant congrus, mod. $p$; mais alors $p^2$ ne divise pas $|F(c)| = m\times n$ et $p$ ne divise pas $n$ (propriétés de la congruence fondamentale **4** et **5**).

L'idéal $\mathbf{E}_1$ engendré par des entiers algébriques est entier, comme il contient trois entiers rationnels premiers entre eux, il contient leur p.g.c.d., qui est 1; il contient donc tous les entiers du corps et il est égal à $\mathbf{E}(\theta)$, ou à (1). Donc:

$$\mathbf{M}\times\mathbf{M}' = (m)\times(1) = (m).$$

Le cas général en résulte immédiatement, par application de la *commutativité* et de l'*associativité* de la multiplication:

$$\mathbf{I} = (q)\times(m,\ \theta-c), \qquad \mathbf{I}' = (q)\times(m,\ \theta'-c);$$
$$\mathbf{I}\times\mathbf{I}' = (q)\times(q)\times(m,\ \theta-c)\times(m,\ \theta'-c) = (q^2)\times(m) = (q^2m).$$

La seconde propriété se déduit immédiatement de la première:

$$\text{Norme de } \mathbf{I}\times\mathbf{J} = (\mathbf{I}\times\mathbf{J})\times(\mathbf{I}'\times\mathbf{J}') = (\mathbf{I}\times\mathbf{I}')\times(\mathbf{J}\times\mathbf{J}')$$
$$= [N(\mathbf{I})]\times[N(\mathbf{J})].$$

Le *carré d'un idéal double* **G** —égal à son conjugué, (**7**)— *est égal à l'idéal principal rationnel*, dont une base est la norme de **G**:

$$\mathbf{G} = q\times(g,\ \theta-c) = q\times(g,\ \theta'-c) = \mathbf{G}' \ \Rightarrow\ \mathbf{G}^2 = \mathbf{G}\times\mathbf{G}' = (q^2\times g).$$

Les cas particuliers indiqués pour la multiplication entraînent des cas particuliers et des conséquences du théorème des normes.

La *norme d'un idéal principal* ($\rho$) *est égale à la valeur absolue* $|N(\rho)|$, de la norme de $\rho$ [égale pour les diverses bases possibles, (**11. 1**)], [ceci a déjà été établi par un raisonnement direct pour un idéal canonique, (**11. 3**)]

$$(\rho)\times(\rho') = (\text{norme de } \rho) \quad\Rightarrow\quad \text{norme de } (\rho) = |\text{norme de } \rho|.$$

En particulier la norme d'un *idéal principal rationnel* ($q$) est égale à $q^2$.

*Un idéal entier* **F** *contient sa norme*, puisque son idéal conjugué **F**′ étant aussi entier, chacun d'eux contient $\mathbf{F}\times\mathbf{F}'$.

Il n'y a qu'*un idéal entier, de norme* 1, qui est l'*idéal unité*. Car un tel idéal étant contenu dans (1) et contenant (1), lui est égal.

## 14. Division des idéaux fractionnaires.

Définition. — *Deux idéaux*, non nuls, *sont* **inverses** —ou chacun d'eux est l'inverse de l'autre— *lorsque leur produit est égal à l'idéal unité* (1).

Les normes d'idéaux inverses sont des nombres inverses, puisque leur produit est égal à la norme de l'idéal (1). Cette remarque, jointe à l'expression du produit de deux idéaux conjugués (**13**), conduit à la construction d'idéaux inverses.