**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique

**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

**Band:** 6 (1960)

**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE

**Autor:** Breny, H.

**Kapitel:** 3, 1. Remarques théoriques

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-36341

**Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

**Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

**Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 01.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

# LES MODÈLES LINÉAIRES EN ANALYSE STATISTIQUE

par H. Breny

*(suite)*

## 3. Cas ou rg $\mathfrak{A}$ = dim $\mathbf{B}$.

### 3, 1. *Remarques théoriques.*

3, 11. Lorsque $r = p$, $\mathfrak{G} \equiv \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}$ est une matrice symétrique $p \times p$, régulière, dont on peut former l'inverse $\mathfrak{G}^{-1}$. Alors, de

$$\mathfrak{G}\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{A}^T \mathfrak{x}$$

on tire

$$\hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} \,,$$

et on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\, \hat{\mathfrak{b}}_H &= \mathbf{E} \left(\hat{\mathfrak{b}}_H - \mathfrak{b}_H\right) \left(\hat{\mathfrak{b}}_H - \mathfrak{b}_H\right)^T \\ &= \mathbf{E}\, \mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A}^T (\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{x}) (\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{x})^T \mathfrak{A}\, \mathfrak{G}^{-1} \,. \end{aligned}$$

Mais

$$\mathbf{E}\, (\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{x}) (\mathfrak{x} - \mathbf{E}\,\mathfrak{x})^T = \mathbf{C}\,\mathfrak{x} = \mathfrak{J}_n\, \sigma^2 \,,$$

donc

$$\mathbf{C}\, \hat{\mathfrak{b}}_H = \mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A}^T (\mathfrak{J}_n \sigma^2)\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{G}^{-1} = (\mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A}^T \mathfrak{A}\, \mathfrak{G}^{-1})\, \sigma^2 = \mathfrak{G}^{-1} \sigma^2 \,. \quad (13)$$

Le calcul de $\mathfrak{G}^{-1}$ équivaut donc à celui de $\mathbf{C}\, \hat{\mathfrak{b}}_H$.

3, 12. Pour le calcul de **SCN**, il faut former les équations (7); ici, les $\mathfrak{u}_i^\star$ sont représentés par les lignes de $\mathfrak{A}^T$, $\mathfrak{c}_i^T$, de sorte que, aux inconnues près, le système (7) n'est autre que le système normal (donc, $\lambda_i = \hat{\mathfrak{b}}_{H,i}$); il résulte alors de (8) que

$$\begin{aligned} \mathbf{SCN} = \sum_1^p \hat{\mathfrak{b}}_{H,i}\, \mathfrak{c}_i^T \mathfrak{x} &= \hat{\mathfrak{b}}_H^T \mathfrak{A}^T \mathfrak{x} \\ &= (\mathfrak{x}^\star \mathfrak{A})\, \mathfrak{G}^{-1} (\mathfrak{A}^T \mathfrak{x}) \,. \quad (14) \end{aligned}$$

3, 13. **SCE** acquiert ici une signification très simple. En effet, si on pose

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H + \mathfrak{r}$$

(de sorte que les composantes $r_{H,i}$ de $r_H$ sont les «résidus»), on a, d'une part,

$$\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{y} = \mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H\,,$$

et, d'autre part,

$$\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{y} = \mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H + \mathfrak{A}^T\,\mathfrak{r}\;;$$

on a donc $\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{r} = 0$; dès lors

$$\begin{aligned}
\mathfrak{y}^\star\,\mathfrak{y} &= \left(\hat{\mathfrak{b}}_H^T\,\mathfrak{A}^T + \mathfrak{r}^T\right)\left(\mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H + \mathfrak{r}\right) \\
&= \hat{\mathfrak{b}}_H^T\,\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H + \mathfrak{r}^T\,\mathfrak{r} + \hat{\mathfrak{b}}_H^T\,\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{r} + \mathfrak{r}^T\,\mathfrak{A}\,\hat{\mathfrak{b}}_H \\
&= \hat{\mathfrak{b}}_H^T\,\mathfrak{A}^T\,\mathfrak{y} + \mathfrak{r}^T\,\mathfrak{r} = \mathbf{SCN} + \mathfrak{r}^T\,\mathfrak{r}\,,
\end{aligned}$$

d'où, puisque $\mathfrak{y}^\star\,\mathfrak{y} = \mathbf{SCT}$,

$$\mathbf{SCE} = \mathfrak{r}^T\,\mathfrak{r} = \sum_1^n \mathfrak{r}_{H,i}^2\,.$$

3, 14. Si $\mathfrak{G}$ est diagonale (ce qui arrive si et seulement si les lignes de $\mathfrak{A}^T$ correspondent à des vecteurs deux à deux orthogonaux de $\mathbf{V}_+$), les $\hat{\mathfrak{b}}_{H,i}$ sont deux à deux orthogonaux, et

$$\mathbf{SCN} = \sum_1^p \mathrm{SC}\{\hat{\mathfrak{b}}_{H,i}\}\,.$$

## 3, 2. *Exécution des calculs.*

3, 21. La résolution des équations normales peut évidemment se faire par un procédé quelconque. On sait toutefois, depuis Benoît et Banachiewicz, que les procédés « compacts » habituels constituent tous des variations plus ou moins heureuses de la méthode de « factorisation triangulaire », particulièrement simple à appliquer dans le cas d'une matrice symétrique, comme l'est $\mathfrak{G}$ (cfr. [VI, VII]).

3, 22. Il s'agit, en principe, de trouver une matrice $\mathfrak{S}$, triangulaire supérieure, telle que

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{S}^T\,\mathfrak{S} = \mathfrak{S} \times^0 \mathfrak{S}\,.$$